Problemas de Matemáticas 2º Bachillerato

OPTIMIZACIÓN

En este documento se explica brevemente cómo se resuelven los problemas de optimización, y se ilustra mediante un ejemplo. Como sabéis, los problemas de optimización son una importante aplicación de las derivadas. Cuando la relación entre una magnitud y otras puede expresarse mediante una función matemática, $F=F(x,y,z)$ las derivadas permiten calcular qué valores de las variables x, y, z permiten obtener valores óptimos (máximos o mínimos) de la magnitud F.

En general, todos los problemas de optimización se resuelven mediante un par de ecuaciones, siguiendo los siguientes pasos:

1) En primer lugar hay que **identificar la función** que nos piden optimizar (maximizar o minimizar), que generalmente dependerá de un par de variables, $F=F(x,y)$;

2) Una de las ecuaciones necesarias para resolver el problema es la **condición de máximo o mínimo** ($f'(x)=0$), que hay que aplicarla a una función F que hay que optimizar; pero como la condición de máximo o mínimo hay que aplicarla derivando respecto a una sola variable, antes de derivarla tenemos que expresarla en función de una sola variable $F=F(x)$;

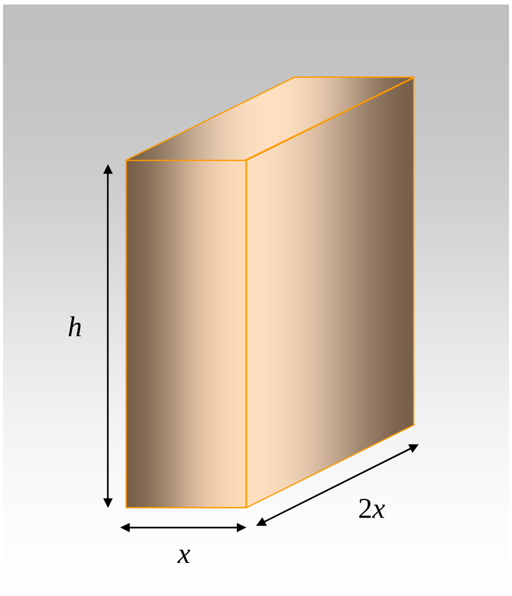
3) La otra ecuación, necesaria para obtener la función $F=F(x)$ será una condición, frecuentemente geométrica, entre las variables x e y; esta segunda condición nos permite **expresar una de las variables en función de la otra**, $y=y(x)$, y luego sustituirla en la función $F(x,y)$, con lo cual la función a optimizar pasa a depender de una sola variable x, y así se le puede aplicar la condición de máximo o mínimo.

Los siguientes problemas resueltos están elegidos pretenden ilustrar este procedimiento: uno de ellos es sencillo y el otro es de mayor complejidad, extraídos de un libro de texto de 2º de Bachillerato.

PROBLEMA DE NIVEL BART:

Considera un prisma recto de base rectangular, con dos de los lados de este rectángulo de longitud doble que los otros dos. Encuentra las dimensiones que ha de tener este prisma para que su área total sea de 12 m² y su volumen máximo.

En primer lugar, hay que identificar la función que vamos a optimizar: es el **volumen del prisma**, que debe ser máximo: $V=x\cdot y\cdot z$, pero depende de tres variables. Como nos indican que la base del prisma mide doble en una dimensión que en otra, por ejemplo doble de largo que de ancho, entonces $y=2x$. Si llamamos h a la altura, $z=h$, entonces la función volumen depende de x y de h, $V=V(x,h)=x\cdot 2x\cdot h= 2x^2h$.



Así, tenemos la **función a optimizar en función de 2 variables**. Para que dependa sólo de una variable, debemos obtener una relación entre x y z que nos permita expresar la una en función de la otra. Usaremos el dato de área que da el problema: si el área total deben ser 12 m², tenemos que:

- Las bases superior e inferior miden $x\cdot 2x=2x^2$, en total $4x^2$ (m²);
- Las caras laterales miden $2x\cdot h=2xh$, en total $4xh$ (m²);
- Y las caras delantera y trasera miden $x\cdot h$, en total $2xh$ (m²).

Por tanto, la **condición geométrica entre *x* y *h*** es: $12 = 4x^2 + 4xh + 2xh = 4x^2 + 6xh$ (en m²); de aquí podemos despejar la altura h en función del ancho x de la base: $h=\dfrac{12-4x^2}{6x}$.

Sustituyendo esta expresión de h en la función $V=V(x,h)$, tenemos:

$$V=V(x,h)=2x^2h=2x^2\frac{12-4x^2}{6x}=\frac{24x-8x^3}{6}=\frac{12x-4x^3}{3}$$

Como esta expresión para la función $V=V(x)$ ya depende sólo de una variable, le podemos aplicar la **condición de máximo o mínimo** (es decir, la primera derivada debe ser nula, $\boldsymbol{V'(x)=0}$) con lo que:

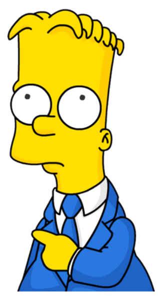
$V'(x)=0$; $\frac{12-12x}{3}=4-4x=0$; $x=1$ m.

Ahora teóricamente deberíamos verificar que esta longitud corresponde a un volumen máximo, y no mínimo. Para ello se pueden seguir dos procedimientos:

modo A) sustituir este valor de x en la segunda derivada de la función, y comprobar que $V''(1) < 0$ (la **condición de máximo es $\boldsymbol{V'(x) = 0}$ y $\boldsymbol{V''(1) < 0}$**, mientras que la de mínimo es $V'(x) = 0$ y $V''(1) > 0$). Puede comprobarse que efectivamente $V''(x) = -4 < 0$.

Y **modo B)** comprobar que antes de ese punto la función $V(x)$ es creciente ($V'(x)>0$ para $x<1$) y después decreciente ($V'(x)<0$ para $x>1$). Así, puede verificarse que: $V'(½)=2>0$ (o sea que la función $V(x)$ es creciente antes de $x=1$) y que $V'(2)=-4<0$ (lo que indica que $V(x)$ decrece después de $x=1$), por tanto el punto $(1,8/3)$ es un máximo, y no un mínimo.

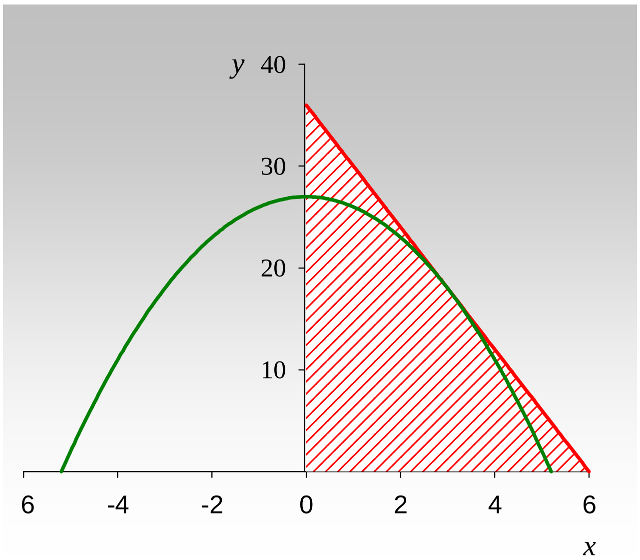
Siempre que se da un punto máximo o mínimo de una función, hay que darlo por sus dos coordenadas (x,y), en este caso (x,V): $V(1)$=**8/3 m³**, es el máximo valor que alcanza el volumen.



PROBLEMA DE NIVEL LISA:

Halla el punto de la parábola $y=27–x^2$, situado en el primer cuadrante, tal que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en ese punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima. Obtén el punto y el valor del área.

En primer lugar, necesitamos plantear la función que hay que optimizar, que es el área de un triángulo rectángulo con los catetos apoyados en los ejes coordenados, y el vértice correspondiente al ángulo recto en el origen de coordenadas (ver figura).



El área del triángulo (rayado en rojo en la figura) es $\boldsymbol{A=Bh/2}$, donde B=base=uno de los catetos, y h=altura=el otro cateto. Estas longitudes se corresponden con los valores a y b de los **puntos de corte de la recta con los ejes coordenados, (a,0) y (0,b)**. Pero las longitudes de los catetos dependerán de cuál sea el punto de tangencia T de la curva. Para hallar la relación entre B, h y el punto de tangencia, vamos a expresar la ecuación de la tangente a partir de las coordenadas del punto de tangencia T.

Si llamamos t al valor de abscisa del punto de tangencia, las coordenadas del punto T serán $(t,27–t^2)$. Por otro lado, la pendiente m de la recta tangente es el valor de la derivada de la curva en el punto T: $y=f(x)=27-x^2$; $m=f'(x)=-2x$; por tanto la pendiente será $m=-2t$. De aquí que la *ecuación punto-pendiente* de la tangente será:

$$y-(27-t^2)=-2t(x-t)\,; \qquad y-27+t^2=-2tx+2t^2\,; \qquad \boxed{2tx+y+(-27-t^2)=0}$$

Esta es la *ecuación implícita o general* de la recta tangente (en función de la abscisa t del punto de tangencia); para obtener las distancias de los cortes con los ejes, se puede o bien sustituir alternativamente la x ó la y por 0 (**modo A**), o bien pasar la ecuación a forma *canónica* (**modo B**).

Modo A: Cortes con los ejes mediante **sustitución**:

Corte con OX (y=0): $2tx = 27 - t^2$; $\quad x = \dfrac{27 - t^2}{2t} = B$ (longitud de la base)

Corte con OY (x=0): $y = 27 - t^2 = h$ (valor de la altura)

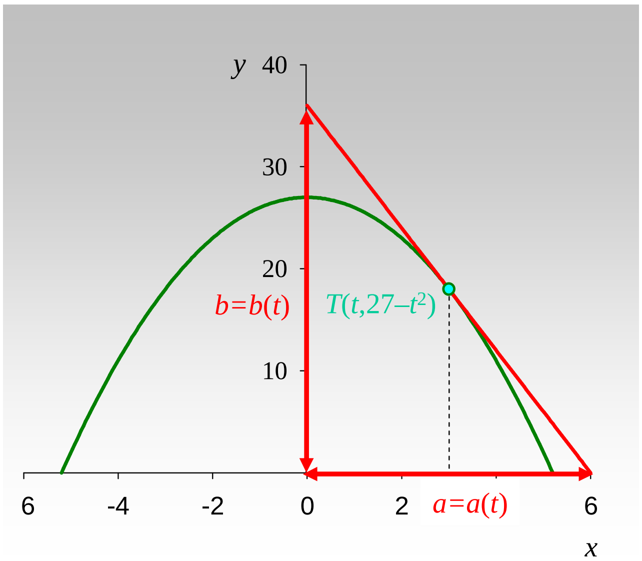
Modo B: Cortes con los ejes mediante la ***ecuación canónica o segmentaria* de la recta**:

$$2tx + y = t^2 + 27; \qquad \frac{2tx}{t^2+27} + \frac{y}{t^2+27} = 1; \qquad \boxed{\frac{x}{\frac{t^2+27}{2t}} + \frac{y}{t^2+27} = 1}$$

De aquí que la distancia del corte con OX al origen sea $a = \dfrac{t^2+27}{2t}$, y la distancia del corte con OY sea: $b = t^2 + 27$.

Ahora, la función Área, que dependía de las dos variables B y h (o bien x e y, o bien a y b), A=A(B,h), pasará a depender de una sola variable, sólo que en vez de disponer de una de las variables en función de la otra, y=y(x), disponemos de ambas en función del parámetro t: B=B(t), h=h(t). Pero de todos modos, tenemos el área en función del parámetro A=A(t), o sea de una sola variable, para poder derivarla y aplicar la condición de máximo o mínimo, $A'(t)$=0.

La función Área es entonces: $A(t) = \dfrac{(27+t^2)\dfrac{27+t^2}{2t}}{2} = \dfrac{(27+t^2)^2}{4t} = \dfrac{t^4 + 54t^2 + 729}{4t}$



La condición de mínimo queda así:

$$A'(t)=\frac{\frac{27+t^2}{2t}\cdot(27+t^2)}{2}=\frac{729+54t^2+t^4}{4t}=0\,;\qquad 3t^4+54t-729=0\,;$$

$t^4+18t^2-243=0$ (ecuación *bicuadrada*, que se resuelve mediante un *cambio de variable*);

$$z=t^2, z^2=t^4;\qquad z^2+18z-243=0\,;\quad z=\frac{-18\pm 36}{2}\,;\qquad \begin{cases} z_1=9\rightarrow x_1=\pm 3 \\ z_2=-27\rightarrow x_2\notin\Re \end{cases}$$

Como nos piden un punto del primer cuadrante, descartamos el valor negativo de t. Puede comprobarse que para $t=+3$ se alcanza un mínimo en la función $A(t)$, ya que el numerador de $A''(3)>0$.

Así pues el punto de la curva en el primer cuadrante donde la tangente determina el triángulo de área mínima con los ejes cartesianos es $T=(t,27-t^2)=(3,18)$, y la ecuación de la tangente es:

$$y-27+9=-6x+18\,;\qquad \boxed{6x+y-36=0}$$

Los cortes con los ejes son $(a,0)=(6,0)$ y $(0,b)=(0,36)$, y el área $A=\frac{36\times 6}{2}=108$ u².