Examen de Selectividad – Matemáticas JUNIO 2014 - Andalucía

OPCIÓN A

1. Sea $f:\Re \to \Re$ definida por: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. **a) [1,75 puntos]** Halla *a*, *b* y *c* para que la gráfica de *f* tenga un punto de inflexión de abscisa *x*=1/2, y que la recta tangente en el punto de abscisa *x*=0 tenga por ecuación $y = 5 - 6x$. **b) [0,75 puntos]** Para *a* = 9, *b* = –9 y *c* = 8, calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) La condición de punto de inflexión es que la segunda derivada se anule, *f''*(*x*)=0:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$

$$f''(1/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 \times \frac{1}{2} + 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + bx + c$$

Por otro lado, el punto de tangencia es el de abscisa *x*=0; para hallar el valor correspondiente de la coordenada *y*, se sustituye en la función sin derivar:

$f(0) = c$, luego el punto de tangencia es *T*(0, *c*).

La recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación *y* = –6*x* + 5, con pendiente *m* = –6; que debe coincidir con la primera derivada en el punto de tangencia, *m* = *f'*(0), por tanto:

$$f'(x) = 3x^2 - 3x + b \quad \Rightarrow \quad f'(0) = b = m = -6$$

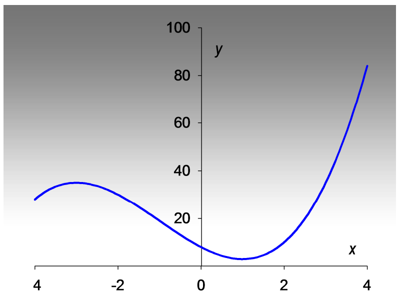
Además, el punto de tangencia *T* pertenece tanto a la curva como a la recta, por lo que el valor de la *y* del punto de la recta de abscisa *x* = 0, es también el punto *T* de la curva, *y* = 5 = *c*.

Así: *a* = –3/2, *b* = –6, *c* = 5; $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$.

b) Ahora la función *f* es: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$. Ver gráfica en *azul*. La condición de extremo relativo es que la primera derivada se anule, *f'*(*x*) = 0:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \{1, -3\}$$

Los valores de y de estos dos extremos relativos son: $f(1) = 3$; $f(-3) = 35$ (en la función sin derivar). Los puntos son: (1, 3) y (–3, 35). Para identificar si son máximos o mínimos sustituimos los valores de abscisas en la segunda derivada:



$f''(x) = 6x + 6 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 12 > 0 \quad \Rightarrow$ (1, 3) es un mínimo;

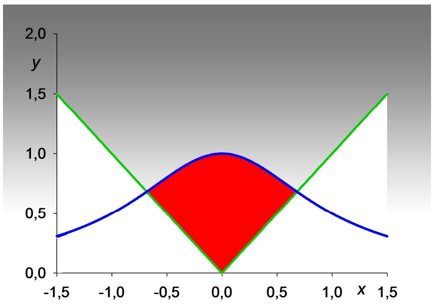
$f''(-3) = -12 < 0 \quad \Rightarrow$ (–3, 35) es un máximo.

2.- Sean $f:\Re \to \Re$ y $g:\Re \to \Re$ las funciones definidas respectivamente por: $f(x)=\dfrac{|x|}{2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. **a) [1 punto]** Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas. **b) [1,5 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.

a) Las dos funciones son funciones con **simetría par**, y el recinto que limitan es simétrico respecto al eje *y*; puede comprobarse que la gráfica de la función *g* tiene un único extremo relativo (un máximo) igualando la primera derivada a cero y sustituyendo en la segunda derivada (se representa en *azul*):

$$g'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad\Rightarrow\quad g'(x)=0 \to x=0 \to f(0)=1 \to (0{,}1) \Rightarrow g''(0)=-2<0 \Rightarrow \text{es máximo.}$$

La gráfica de *f* está formada por dos semirrectas dispuestas simétricamente respecto al eje *y*, con pendiente *m* = +1/2 en el primer cuadrante y *m* = –1/2 en el segundo (se representa en *verde*).



Por simetría, sólo es necesario calcular uno de los cortes, por ejemplo el del primer cuadrante:

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad x^3+x-2=0$$

$(x-1)(x^2+x+2)=0 \quad\Rightarrow\quad$ sólo una solución real:

$f(1)=1/2 \longrightarrow$ (1, ½); los dos puntos de corte son:

$\boxed{(1, ½) \text{ y } (–1, ½)}$.

b) El recinto del que se pide el área (aparece representado en *rojo*) puede hallarse como la integral definida siguiente:

$$A=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{|x|}{2}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{2}\right)dx=2\left[arctgx-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi-1}{2}\ u^2$$

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+y-7z=1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original. **b) [1 punto]** Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

a) Si el sistema formado por tres ecuaciones (incluyendo la ecuación con el parámetro α) tiene las mismas soluciones que el sistema original formado por dos ecuaciones, es porque la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos, y por tanto el sistema es SCI. Por tanto buscamos el valor o valores del parámetro que hagan que Rg(A) = Rg(A*) ≠ 3. El sistema de tres ecuaciones escrito en forma matricial sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 1 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

El valor o valores del parámetro α que hacen que el rango de la matriz de los coeficientes Rg(A) ***no sea 3*** es la solución o soluciones de la ecuación que resulta de igualar el determinante de la matriz de los coeficientes a 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 11\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{. Luego: } \begin{cases} \text{Si } \alpha = 0, \text{Rg(A)} = 2 \\ \text{Si } \alpha \neq 0, \text{Rg(A)} = 3 \end{cases}$$

Para α = 0 el sistema queda como sigue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

, y puede comprobarse fácilmente que la fila 3ª es combinación lineal de las otras dos ($F_3 = 2F_1 - F_2$), de modo que si α = 0, Rg(A*) = Rg(A) = 2. Para cualquier otro valor del parámetro, las tres filas son linealmente independientes, así que $\alpha \neq 0$, Rg(A*) = Rg(A) = 3.

Así que el único valor de α que hace que el sistema sea SCI es $\boxed{\alpha = 0}$.

b) El SCI de dos ecuaciones tiene infinitas soluciones, pero sólo una de ellas cumple la condición de que los valores de las incógnitas sumen 4, ya que esta condición supone una tercera ecuación linealmente independiente con de las otras dos: $x + y + z = 4$. Así, lo que se pide en este apartado es resolver el siguiente SCD:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Para resolver el sistema hay que comprobar si la matriz de los coeficientes es regular (que lo es):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

así que éste cumple las condiciones de un *sistema de Cramer*. Para resolver por el método de Cramer calculamos los determinantes:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{25}{3}; \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -11 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-11}{3};$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-2}{3} \qquad \boxed{(x, y, z) = \left(\frac{25}{3}, -\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right)}$$

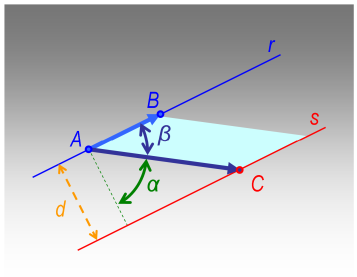
4.- Considera la recta *r* que pasa por los puntos *A*(1,0,–1) y *B*(–1,1,0). **a) [1 punto]** Halla la ecuación de la recta *s* paralela a *r* que pasa por *C*(–2,3,2). **b) [1,5 puntos]** Calcula la distancia de *r* a *s*.

a) Puede obtenerse la ecuación de la recta *r* como la ecuación de la recta que pasa por dos puntos; es una forma de la ecuación continua, utilizando el vector que va desde A hasta B como el vector director de la recta:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1,1,0) - (1,0,-1) = (-2,1,1)$$

$r \equiv \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$; y entonces *s* será la paralela que pasa por *C*: $\boxed{s \equiv \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{1}}$.

b) Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas hay que tener en cuenta que la distancia debe medirse perpendicularmente a la dirección de las mismas (como se indica en *naranja* en la figura).



Puede calcularse la distancia como: $d = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\alpha$; como los ángulos $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son complementarios ($\alpha+\beta$ = 90º), cos α = sen β, así que puede reescribirse: $d = \left|\overrightarrow{AC}\right| sen\beta$. El valor de esta expresión no se modifica al multiplicar y dividir por un mismo número, y al multiplicar y dividir por el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ (que se muestra en *azul claro*), podemos expresar esta distancia en función del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, ya que: $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right| sen\beta}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$.

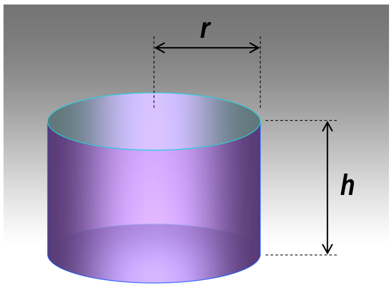
Nótese que la distancia que queremos calcular es la altura del paralelogramo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, considerando que el vector $\overrightarrow{AB}$ es la base. De ahí que dividiendo el módulo del producto $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (que vale igual que el área del paralelogramo representado en *celeste*) entre el módulo de $\overrightarrow{AB}$ (la base), resulte la altura.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{j} - 3\vec{k} = (0,3,-3) \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ u^2.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}\ u^2. \qquad \boxed{d = \sqrt{3}u^2}$$

OPCIÓN B

1.- [2,5 puntos] Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125m³. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.



V=125m³, A=mínima

La función que hay que optimizar es el área del cilindro sin base superior, que depende de dos variables (radio *r* de la base y altura *h*, como se muestra en la figura), y es la suma del área de un círculo más la de un rectángulo de base igual al perímetro de la base del cilindro y altura la del depósito:

$$A(r,h)=\pi r^2+2\pi rh$$

Para que esta función dependa de una sola variable aplicamos la condición geométrica que nos limita el volumen a 125m³:

$$V(r,h)=\pi r^2 h=125 \quad\Rightarrow\quad h=\frac{125}{\pi r^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{A(r)=\pi r^2+2\pi r\frac{125}{\pi r^2}=\pi r^2+\frac{250}{r}}$$

$$A'(r)=2\pi r-\frac{250}{r^2} \quad\Rightarrow \text{Condición extremo relativo: } A'(r)=0 \quad\Rightarrow\quad 2\pi r=\frac{250}{r}\Rightarrow \boxed{r=\sqrt{\frac{125}{\pi}}}$$

Puede confirmarse que se trata de un mínimo y no de un máximo al sustituir en la derivada segunda: $A''(r)=2\pi+\dfrac{500}{r^3} \quad\Rightarrow\quad A''\left(\sqrt{\dfrac{125}{\pi}}\right)>0$, y el valor correspondiente de la altura es $h=\dfrac{125}{\pi\dfrac{125}{\pi}}=1\,\text{m}$, y el de la superficie mínima es entonces: $A\left(\sqrt{125/\pi}\right)=125+2\sqrt{125\pi}$ m².

2.- [2,5 puntos] Sea *f* la función definida por $f(x)=x\ln(x+1)$ para *x* > –1 (ln denota logaritmo neperiano). Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

Son funciones primitivas las infinitas funciones *F*(*x*) que se obtienen por la integral indefinida de *f*(*x*), para cada valor de la constante de integración $C\in\Re$. Se pide la función concreta para la que *F*(1) = 0.

$F(x)=\int x\ln(x+1)dx$; para resolver esta integral por partes vamos a definir *u* y *dv*:

$$\left.\begin{array}{r} u=\ln(x+1)\longrightarrow du=\dfrac{1}{x+1}dx \\ dv=xdx\longrightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}dx$$

Ahora hay que resolver la integral racional. Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, hay que efectuar la división de polinomios. Puede demostrarse que este integrando es igual a: $\dfrac{x^2}{x+1}=(x-1)+\dfrac{1}{x+1}$; por tanto la integral queda:

$$F(x)=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)+C$$

$$F(x)=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+C\text{, siendo } C\in\Re.$$

Ahora para hallar el valor concreto de C para el que la gráfica de F pasa por (1, 0) imponemos la condición $F(1) = 0$:

$$F(1)=0-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+C=0\quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\boxed{F(x)=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}$$

3.- [2,5 puntos] Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica: $AX+B=A^2$.

Para despejar la matriz X de esta ecuación pasamos B al segundo miembro: $AX = A^2 - B$, y multiplicamos *por la izquierda* por la matriz inversa de A, A^{-1}: $A^{-1}\cdot AX = IX = \boxed{X = A^{-1}\cdot(A^2 - B)}$.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix};\quad A^2-B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$

Hallamos la inversa de A por el método de Gauss por ejemplo:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F2+F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F1-F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&0&-1&0\\1&1&1&1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow{F2+F1-F3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

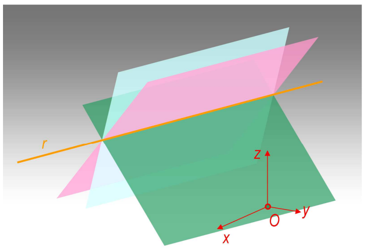
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix};\qquad X=A^{-1}\cdot(A^2-B)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&3&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&3&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}}$$

4.- Sea *r* la recta definida por: $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Determina la ecuación general del plano que contiene a *r* y pasa por el origen de coordenadas. **b) [1 puntos]** Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a *r* en el punto (1, 1, 0).

Como la recta *r* (representada en la figura en color *naranja*) viene dada en forma implícita, como la intersección de dos planos secantes (π_1 y π_2, representados en la figura en *celeste* y *rosa*), puede describirse cualquier otro plano que contenga a *r* como un elemento del haz de planos secantes determinado por éstos. Nos piden el que pasa por el origen de coordenadas (sea π_1, que se representa aquí en *verde*).



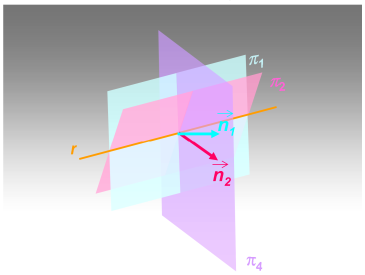
Para hallar la ecuación de un haz de planos secantes sólo hay que multiplicar una de las ecuaciones por un parámetro y sumarlas:

$$\begin{array}{l} x+2y-z=3 \\ 2tx-ty+tz=t \\ \hline (2t+1)x+(2-t)y+(t-1)z=3+t \end{array}$$

Para que el origen de coordenadas pertenezca al plano, al sustituir sus coordenadas (0,0,0) debe satisfacer su ecuación; por tanto: 0 = 3 + *t*, de donde obtenemos el valor del parámetro *t* para el que el plano pasa por *O*: $\boxed{t=-3}$, así que:

$$\boxed{\pi_3 \equiv -5x+5y-4z=0}$$

b) En primer lugar habría que comprobar si el punto pertenece a la recta (efectivamente, pertenece, ya que sus coordenadas satisfacen la ecuación de los dos planos π_1 y π_2, que definen a *r*).



Ahora, los vectores normales de π_1 y π_2 (cuyas componentes coinciden con los coeficientes de *x, y, z* en las ecuaciones generales de los planos respectivos) (llamémoslos $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$, que aparecen representados en *turquesa* y *fucsia*, respectivamente) son perpendiculares a la recta y por tanto están contenidos en el plano perpendicular que nos piden (π_4, en *morado*), así que nos sirven como vectores directores del plano:

$(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(1,2,-1)+\mu(2,-1,1)$ o, en paramétricas como nos piden: $\boxed{\begin{cases} x=1+\lambda+2\mu \\ y=1+2\lambda-\mu \\ z=-\lambda+\mu \end{cases}}$