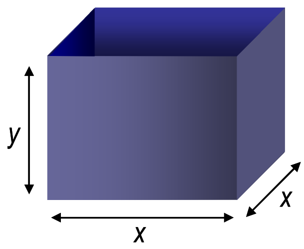
Examen de Selectividad – Matemáticas JUNIO 2015 - Andalucía

OPCIÓN A

1.- [2,5 puntos] Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad de 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.

Éste es un problema típico de optimización.

Para un depósito en forma de prisma de base cuadrada $x \times x$, altura *y*, y sin base superior, la superficie de chapa necesaria será 4 caras laterales y una base cuadrada: $A(x,y) = 4xy + x^2$. Esta es la función que tenemos que optimizar.



Para relacionar las dos variables usaremos la condición geométrica del volumen: $V(x,y) = x^2 y = 13{,}5$, así podemos expresar una variable en función de la otra, y obtener la función *Área* dependiente de una sola variable, *A*(*x*), para aplicarle la condición de extremo relativo, *A'*(*x*)=0. Pues despejamos por ejemplo la altura *y*, la sustituimos en la función *A*(*x,y*):

$y = \frac{13{,}5}{x^2} \Rightarrow A(x,y) = 4x\frac{13{,}5}{x^2} + x^2 = \frac{54}{x} + x^2 = A(x)$, así ya la podemos derivar:

$A'(x) = -\frac{54}{x^2} + 2x \Rightarrow -\frac{54}{x^2} + 2x = 0 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$; la base mide 3 m de ancho y de largo.

$y = \frac{13{,}5}{x^2} = \frac{13{,}5}{9} = 1{,}5$; y mide 1,5 m de alto.

$\boxed{\text{Dimensiones óptimas para mínimo volumen: 3 m} \times \text{3 m} \times \text{1,5 m.}}$

Para estar seguros, comprobemos que estos valores corresponden a un mínimo y no a un máximo; para ello comprobaremos el signo de la derivada segunda:

$A''(x) = \frac{108}{x^3} + 2 \quad \Rightarrow \quad A''(3) = 6 > 0$; efectivamente es un **mínimo**.

El valor de área correspondiente sería $A(3) = 4 \times 3 \times 1{,}5 + 3^2 = \boxed{27 \text{ m}^2}$

2.- [2,5 puntos] Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx$.

Ésta es una integral racional con grado del numerador mayor que el grado del denominador: antes de descomponer el integrando en fracciones simples, hay que **dividir**. Al dividir, el cociente resulta ser –1 y el resto x–2, así que:

$$\frac{-x^2}{x^2 + x - 2} = -1 + \frac{x-2}{x^2 + x - 2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx = \int -1 dx + \int \frac{x-2}{x^2 + x - 2} dx$$

De estas dos integrales, la primera es inmediata (igual a $-x$) y la segunda es otra integral racional con grado del numerador menor que el del denominador, por tanto puede descomponerse en fracciones simples por el ***método de los coeficientes indeterminados***.

Para ello, en primer lugar hallamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0 \Rightarrow x\in\{-2,1\}$, y resultan dos raíces reales sencillas; entonces descomponemos la función racional en dos fracciones simples, cada una de las cuales presenta en el numerador un coeficiente indeterminado (A o B) y en el denominador el factor de Ruffini correspondiente a una de las raíces (x+2 ó x–1):

$$\frac{x-2}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2}=\frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/3\\ B=4/3\end{cases}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{4}{3}\frac{1}{x+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{x-2}{x^2+x-2}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{4}{3}\int\frac{1}{x+2}dx=-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|=\ln\sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{|x-1|}}$$

$$\boxed{\int\frac{-x^2}{x^2+x-2}dx=-x-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C=-x+\ln\left|\sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x-1}}\right|+C}$$

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\lambda x+y-z=-1\\ \lambda x\qquad+\lambda z=\lambda\\ x-y+\lambda z=0\end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.

b) [1 punto] Resuelve el sistema para λ=0.

a) En forma matricial, el sistema quedaría representado de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & -1 & -1\\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & -\lambda & 0\end{array}\right)$$

Un sistema de ecuaciones lineales, según el **Teorema de Rouché-Frobenius**, será compatible si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el de la matriz ampliada, Rg(A)=Rg(A*), e incompatible si no, o sea si Rg(A)≠Rg(A*). Y en caso de compatibilidad, será determinado si los rangos coinciden con el número de incógnitas, Rg(A)=Rg(A*)=n, e indeterminado si no, es decir si Rg(A)=Rg(A*)≠n.

En primer lugar, hallaremos los valores de λ que hacen que Rg(A)≠3, ya que, si Rg(A)=3, entonces Rg(A*)=3, y entonces el sistema es **SCD** (caso general). Para ello, resolvemos:

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ \lambda & 0 & \lambda\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad\lambda-\lambda+\lambda^2-\lambda^2=0\quad\Rightarrow\quad 0=0$$

Esto indica que todos los valores reales de λ hacen que Rg(*A*)≠3, por tanto este sistema nunca será SCD, para ningún valor de λ.

Si la segunda ecuación se divide por λ,el sistema que se obtiene es equivalente (tiene las mismas soluciones), quedando así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda & 0\end{array}\right);\quad A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{pmatrix};\quad A^*=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda & 0\end{pmatrix}$$

(Aún así, el rango de la matriz de los coeficientes nunca será 3, ya que $|A|=0,\ \forall\lambda\in\Re$)

El Rg(*A*) será entonces 2, ya que existe algún menor de orden 2 no-nulo en A, por ejemplo: $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$; ahora, ¿y el rango de la matriz ampliada *A**? Los determinantes menores de orden 3 que se pueden definir en *A** (eliminando de *A** la primera columna de *A*, la segunda o la tercera), sólo se anulan para $\lambda=0$:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 0\end{vmatrix}=\lambda=0\Leftrightarrow \text{ sólo si } \lambda=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 0\end{vmatrix}=\lambda+\lambda^2=0\Leftrightarrow \text{ sólo si } \lambda=0 \text{ ó } \lambda=\text{-}1$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\lambda=0\Leftrightarrow \text{ sólo si } \lambda=0$$

(El valor $\lambda=-1$ anula uno pero no todos los determinantes menores de orden 3 de *A**, así que para $\lambda=-1$ el rango de *A** es 3)

Por tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \lambda=0 \quad\Rightarrow\quad Rg(A)=Rg(A^*)=2 \quad\Rightarrow\quad \text{SCI (existen infinitas soluciones)}\\ \text{Si } \lambda\neq 0 \quad\Rightarrow\quad Rg(A)=2\neq Rg(A^*)=3 \quad\Rightarrow\quad \text{SI (no hay solución)}\end{array}}$$

b) Para $\lambda=0$ el sistema queda como sigue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\ \textbf{(SCI)}$$

y, obviamente, se puede suprimir la ecuación segunda. En forma no-matricial, quedaría:

$$y-z=-1$$
$$x+y=0$$

Para resolver este SCI pasaríamos una de las variables, por ejemplo la *z,* a los términos independientes y la trataríamos como un parámetro:

$$y = -1 + z$$
$$x = -y = 1 - z$$

Con lo cual la solución sería: $\boxed{(x, y, z) = (1 - z, \quad z - 1, \quad z), \quad \forall z \in \Re}$, o bien, en forma de la ecuación paramétrica de una recta:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \quad \cdots \forall t \in \Re \\ z = t \end{cases}}$$

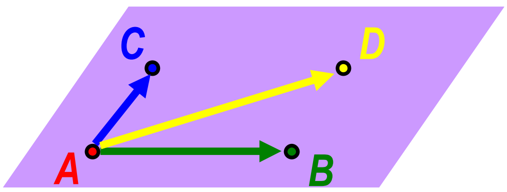
4.- Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$.

a) [0,75 puntos] Calcula m para que *A*, *B*, *C* y *D* estén en un mismo plano.

b) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos *A* y *B* son simétricos.

c) [1 punto] Calcula el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.

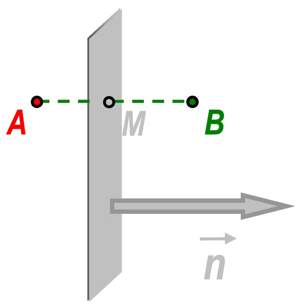
a) Para que los puntos A, B, C, D, sean coplanarios, se debe verificar que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes, se decir, estén contenidos también en un mismo plano, como muestra la figura. Conforme a las propiedades de los determinantes, significaría que el determinante formado con los correspondientes vectores-fila debe ser nulo, así que:



$$\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (2,1,3) - (0,1,1) = (2,0,2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,2,0) - (0,1,1) = (-1,1-1) \\ \overrightarrow{AB} = (2,1,m) - (0,1,1) = (2,0,m-1) \end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m - 6 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

(Y en efecto, si *m*=3, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son paralelos, y D es coplanario con A, B, C)

b) El plano π respecto al que A y B son simétricos (**plano mediador**) es el plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio M. Por tanto, el vector normal del plano es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$ (o el mismo vector $\overrightarrow{AB}$). Recordemos que las componentes del vector normal del plano coinciden con los coeficientes de *x, y, z* en la ecuación general del plano:



$\pi \equiv \quad 2x + 2z + d = 0$, faltándonos por conocer el término independiente *d*.

Para determinar el valor de d necesitamos conocer un punto que pertenezca al plano, y para ello usamos la condición de que π debe pasar por el punto *M* del segmento:

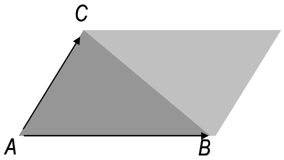
$M = (\frac{0+2}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2}) = (1,1,2)$, y ahora sustituyendo estas coordenadas en la ecuación de π tenemos que:

$$2\times 1 + 2\times 2 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -6 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv 2x + 2z - 6 = 0 \quad \equiv \quad \boxed{x + z - 3 = 0}$$

c) El área del triángulo $\widehat{ABC}$ viene dada por el producto vectorial, según:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(-2,0,-2)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} =$$

$\boxed{\sqrt{2} \quad u^2}$



ya que el área del triángulo (marcada en **gris oscuro** en la figura) es la mitad del área del paralelogramo definido por los vectores (marcada en *gris claro* en la figura); y el área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores que definen sus lados ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$).

OPCIÓN B

1.- [2,5 puntos] Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-\cos x}{\sin(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos x}{\sin(x^2)}=\frac{0+0+1-1}{0}=\left(\frac{0}{0}IND,L'Hôpital\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+\sin x}{2x\cdot\cos(x^2)}=\frac{b}{0}\to\infty,$$

a no ser que b = 0; dado que el límite no puede ser infinito, $\boxed{b=0}$. Y entonces, el límite resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+\sin x}{2x\cdot\cos(x^2)}=\cdots=\left(\frac{0}{0}IND,L'H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos x}{2\cos(x^2)-(2x)^2\sin(x^2)}=\frac{2a+1}{2}$$

Como nos imponen que el límite debe valer 1: $\dfrac{2a+1}{2}=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a=\dfrac{1}{2}}$

2.- [2,5 puntos] Determina la función $f:(0,\infty)\to\Re$ sabiendo que $f''(x)=\ln x$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$. (ln denota logaritmo neperiano).

Que la derivada segunda de la función f sea $f''(x)=\ln x$ significa que f es la *integral de la integral* del ln x. Pero cada vez que integramos aparece una constante de integración que puede tomar cualquier valor real, y los valores de las constantes serán aquéllos que hagan cumplirse las condiciones:

1) pasar por el punto $P(1,2)$, es decir, que cumpla: $\boldsymbol{f(1)=2}$), y

2) que además la primera derivada se anule en x = 2, o sea, que $\boldsymbol{f'(1)=0}$.

$$f'(x)=\int\ln x\,dx=\left(\begin{array}{lll}\text{PARTES}: & u=\ln x & \Rightarrow\quad du=\frac{1}{x}dx\\ & dv=dx & \Rightarrow\quad v=x\end{array}\right)=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$$

Para hallar C: $f'(1)=0\quad(\text{condición }2)\quad\Rightarrow\quad 1\ln 1-1+C=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{C=1}$

Luego: $\boxed{f'(x)=x\ln x-x+1}$

$$f(x)=\int(x\ln x-x+1)dx=\int x\ln x\,dx-\frac{x^2}{2}+x=\left(\begin{array}{lll}\text{PARTES}: & u=\ln x & \Rightarrow\quad du=\frac{1}{x}dx\\ & dv=x\,dx & \Rightarrow\quad v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx-\frac{x^2}{2}+x=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx-\frac{x^2}{2}+x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+x+D=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}-1\right)+x+D=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+x+D$$

Para hallar D: $f(1)=2\quad(\text{condición }1)\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}\left(\ln 1-\frac{3}{2}\right)+1+D=2\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{4}+D=2\quad\Rightarrow\boxed{D=\frac{7}{4}}$

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+x+\frac{7}{4}}$$

3.- Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & m\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & m & 0\\ 3 & 2 & m\end{pmatrix}$.

a) [1,5 puntos] Encuentra el valor, o los valores, de *m* para los que *A* y *B* tienen el mismo rango.
b) [1 punto] Determina, si existen, los valores de *m* para los que *A* y *B* tienen el mismo determinante.

a) Discutimos los rangos de las dos matrices según los valores del parámetro *m*:

Rg(*A*): Rg(*A*)=2, salvo que: $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow -m-4=0 \quad \Rightarrow m=-4$; por tanto:

Si *m*=–4, Rg(*A*)=1; si *m*≠–4, Rg(*A*)=2

Rg(*B*): Rg(*B*)=3, salvo que: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & m & 0\\ 3 & 2 & m\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad m^2+4m=0 \quad \Rightarrow \quad m\in\{-4,0\}$, entonces:

Si *m*=–4: $B_{-4}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & -4 & 0\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}\cdots(\text{dos filas proporcionales}: F_2=-2F_1)\cdots Rg(B_{-4})=2$

Si *m*=0: $B_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdots(\text{linealmente dependientes}, F_3=F_1-F_2)\cdots Rg(B_0)=2$

Si $m\in\{-4,0\}, \text{Rg}(B)=2$; si $m\notin\{-4,0\}, \text{Rg}(B)=3$

Por tanto:

Si *m*=–4…	Rg(*A*)=1≠Rg(*B*)=2
Si *m*=0…	Rg(*A*)=Rg(*B*)=2
$\forall m\in\Re / m\notin\{-4,0\}\ldots$	Rg(*A*)=2≠Rg(*B*)=3

Sólo coinciden en rango para *m*=0.

b)

$$\left.\begin{array}{l}|A|=-m-4\\ |B|=m^2+4m\end{array}\right\}\Rightarrow \quad m^2+4m=-m-4 \quad \Rightarrow \quad m^2+5m+4=0, \text{ para que coincidan.}$$

$$m=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm 3}{2}\in\{-4,-1\}$$

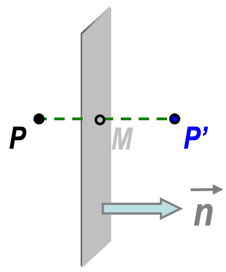
En efecto, para *m* = –4, |*A*|=|*B*|=–3, y para *m* = –1 |*A*|=|*B*|=0.

4.- Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$.

a) [1,5 puntos] Calcula el punto *P'*, simétrico del punto *P*(2,–1,5), respecto del plano *π*.

b) [1 puntos] Calcula la recta *r'*, simétrica de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ respecto al plano *π*.

a) El punto *P'* simétrico está alineado con *P* y con el punto medio entre ellos *M* mediante una recta *s* perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, su vector director debe coincidir en dirección con el vector normal del plano, y también debe pasar por *P*:



$$\vec{v} = \vec{n} = (2,1,-1) \quad \Rightarrow \quad s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{-1}$$

Ahora hallamos *M* como la intersección $s \cap \pi$; para ello pasamos *s* a forma paramétrica:

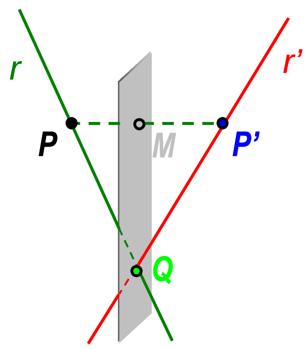
$$s \equiv \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 5-t \end{cases} \Rightarrow \quad M(2+2t,-1+t,5-t) \in \pi \quad \Rightarrow \quad 2(2+2t)+(-1+t)-(5-t)+8=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6t+6=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1, \text{ luego } M \text{ es: } M=(0,-2,6) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PM} = (-2,-1,1)$$

Por simetría, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP'} - (0,-2,6) \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = (-2,-1,1) + (0,-2,6) = (-2,-3,7)$

$$\boxed{P' = (-2,-3,7)}$$

b) Para hallar la recta simétrica basta con calcular la recta que pasa por los dos puntos simétricos de dos puntos de *r*. Como la recta *r* pasa por *P*, uno de los dos simétricos ya lo tenemos (y es *P'*). Podemos elegir el otro punto dando un valor cualquiera al parámetro en las ecuaciones paramétricas de la recta *r*, o bien hallar el corte de *r* con el plano *π*, que es simétrico de sí mismo.



Para hallar $Q = r \cap \pi$ pasamos *r* a paramétricas, y expresamos el punto genérico *Q* en función del parámetro t:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+3t \\ z = 5+t \end{cases} \Rightarrow \quad Q = (2-2t,-1+3t,5+t)$$

Entonces lo sustituimos en la ecuación de *π*, para imponer que pertenezca también al plano:

$$2(2-2t)+(-1+3t)-(5+t)+8=0 \quad \Rightarrow \quad -2t+6=0 \quad \Rightarrow \quad t=3 \quad \Rightarrow \quad Q(-4,8,8)$$

Así que la recta *r'* simétrica a *r* es la que pasa por *P'*(–2,–3,7) y por *Q*(–4,8,8):

$$\frac{x+4}{-2+4} = \frac{y-8}{-3-8} = \frac{z-8}{7-8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r' \equiv \frac{x+4}{2} = \frac{y-8}{-11} = \frac{z-8}{-1}}$$