Probabilidad v5

Guillermo Estivill Baena

Apuntes de Matemáticas de Ciencias Sociales

1-2-2024

PROBABILIDAD

1. Experimento aleatorio, Espacio muestral y Sucesos

1.1. Conceptos

Decimos que un fenómeno o experimento es determinista si su resultado es previsible o conocido tras repetirlo varias veces o estudiarlo previamente.

Por ejemplo, si empujamos una maceta desde el alféizar de una ventana, es obvio que caerá hacia el suelo.

En cambio, un experimento es aleatorio cuando su resultado no es previsible, aunque se haya realizado previamente muchas veces. La **Probabilidad** se dedica al estudio de los fenómenos aleatorios

Por ejemplo, al lanzar un dado no sabemos con seguridad qué resultado arrojará. Tampoco al lanzar una moneda.

El **Espacio Muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden observarse al realizar un experimento aleatorio, y se denota por E. Las llaves { } se utilizan para indicar los elementos de un conjunto, por enumeración.

Ejemplo 1: al lanzar un dado E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Ejemplo 2: Al lanzar una moneda, E = {C, +}.

Llamamos **Suceso** a un subconjunto de resultados del Espacio Muestral, y suelen denotarse por letras mayúsculas.

Ejemplo 1: Por ejemplo, sea el experimento aleatorio lanzar un dado; podemos llamar suceso A al subconjunto formado por los resultados pares, A={2, 4, 6}, podemos llamar suceso B al subconjunto formado por los resultados impares, B={1, 3, 5}, y suceso C al subconjunto formado por los resultados mayores que 4, C={5, 6}.

Llamamos **Suceso Elemental** a cada uno de los resultados individuales posibles que pueden darse al realizar una vez un experimento aleatorio.

Ejemplo 1: Al lanzar un dado, E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, y los sucesos elementales que componen el Espacio Muestral son {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}.

Y llamamos **Suceso Compuesto** al que está formado por varios elementos del Espacio Muestral.

Ejemplo 1: Por ejemplo, al lanzar el dado, A="que salga par"={2, 4, 6}, B="que salga impar" ={1, 3, 5}, o C="que salga más de 4"={5, 6}, son sucesos compuestos.

Llamamos **Suceso Seguro** al que se verifica con seguridad al realizar el experimento aleatorio, y coincide con E.

Ejemplo 1: al lanzar un dado, el suceso D="que salga menos de 8" es seguro.

Y el **Suceso Imposible** es el que nunca se verifica, no forma parte del Espacio Muestral.

Ejemplo 1: Por ejemplo el suceso F="que salga 9".

El conjunto de todos los sucesos es el **Espacio de Sucesos**, contando los elementales y los compuestos posibles, y se denota por S. Se puede demostrar que si el Espacio Muestral E tiene n sucesos elementales, el Espacio de Sucesos tiene 2^n sucesos.

Ejemplo 2: al lanzar una moneda, el Espacio Muestral consta de 2 sucesos elementales: E={C, +}, n=2, así que pueden verificarse $2^n = 2^2 = 4$ sucesos: S = {{Ø}, {C}, {+}, {E}}.

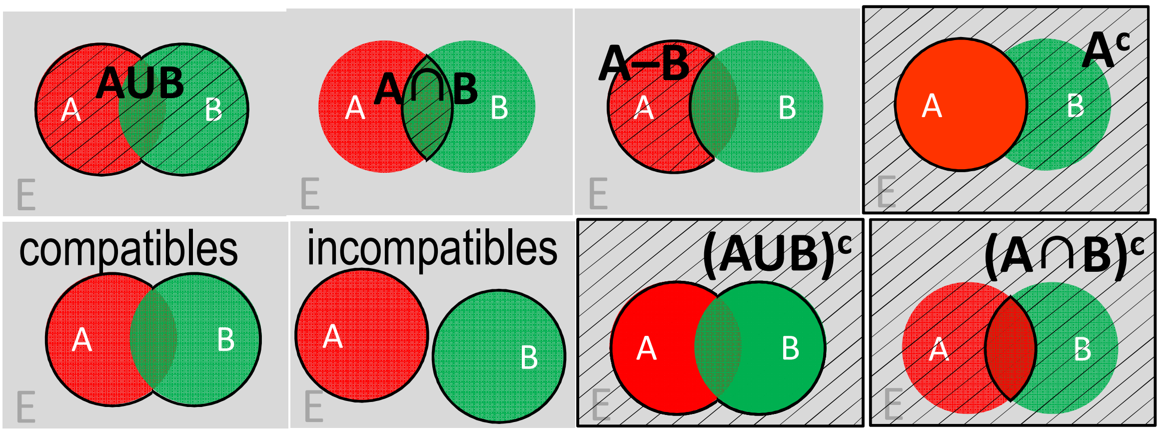
Ejemplo 1: al lanzar el dado (n=6) se pueden obtener $2^6 = 64$ sucesos.

1.2. Representación gráfica mediante diagramas de Venn:

El uso de **Diagramas de Venn** ayuda a visualizar los sucesos, las probabilidades de los sucesos y las operaciones con sucesos, al hacerlas mucho más visuales.

Los sucesos se representan mediante globos coloreados etiquetados por la letra que les da nombre: A, B, etc., en un campo rectangular que representa el Espacio Muestral E. Los globos que representan dos sucesos solapan si los sucesos son compatibles (es decir, si tienen elementos en común, lo que significa lo mismo que decir que pueden verificarse al mismo tiempo), y no solapan si son incompatibles (si no tienen elementos comunes, o no pueden suceder a la vez).

Las operaciones con sucesos (que estudiaremos a continuación) pueden visualizarse rayando o coloreando el área del rectángulo correspondiente a los sucesos unión, intersección, contrarios o diferencia, que se estén considerando. Este tipo de representaciones será útil posteriormente al trabajar con *probabilidades* de sucesos.



2. Operaciones con sucesos

Para ilustrar cómo se realizan operaciones matemáticas con sucesos, referiremos el Ejemplo 1 para todas las operaciones con Sucesos que siguen en este epígrafe. Sea el experimento aleatorio "lanzar un dado", y sean los sucesos A = "que salga par" = {2, 4, 6}, B="que salga impar" ={1, 3, 5}, y C="que salga más de 4"={5, 6}, del Espacio Muestral E.

2.1. Unión e Intersección de sucesos

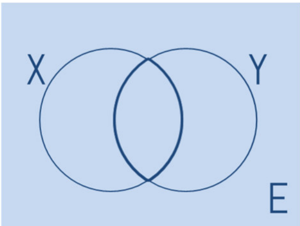
Se llama **Suceso Unión de X e Y**, y se denota X⋃Y (y se nombra *X-unión-Y*), al subconjunto de E formado por los elementos presentes en X o en Y. Es decir, al suceso que tiene lugar cuando se verifica X ó Y.

Ejemplo 1: A⋃B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = E; A⋃C = {2, 4, 5, 6}; B⋃C = {1, 3, 5, 6}.

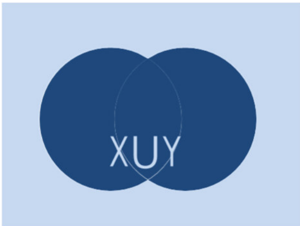
Se llama **Suceso Intersección de X e Y**, y se denota X⋂Y (y puede nombrarse *X-intersección-Y*), al subconjunto de E formado por los elementes presentes simultáneamente en X y en Y. Es decir, la intersección es el suceso que se da cuando se verifican a la vez X e Y.

Ejemplo 1: al lanzar el dado los sucesos intersección entre los que estamos considerando, serán: A⋂B=∅, porque no puede verificarse a la vez que salga en el dado par e impar; A⋂C={6}, es el único suceso elemental par y mayor que 4; B⋂C={5}; es el único suceso elemental impar y mayor que 4.

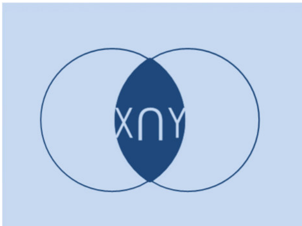
Puede representarse la unión y la intersección en un diagrama de Venn como sigue:



Sucesos X e Y



Unión de X e Y: X⋃Y



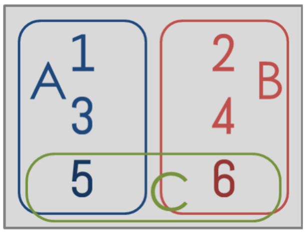
Intersección: X⋂Y

Nota importante: la unión de P y Q incluye los resultados del experimento aleatorio que pertenecen a cualquiera de los dos sucesos; por tanto **P⋃Q** equivale a decir que **se verifica P o Q, o los dos**. La intersección incluye los resultados del experimento que pertenecen a los dos sucesos, y por tanto **P⋂Q** equivale a decir que **se verifican ambos, P y Q**.

2.2. Compatibilidad e Incompatibilidad de sucesos

Cuando la intersección de dos sucesos es el suceso imposible, es decir si X⋂Y=∅, decimos que X e Y son **Sucesos Incompatibles**, porque no pueden verificarse a la vez. En caso contrario, o sea si pueden verificarse a la vez, X⋂Y≠∅, decimos que son **Compatibles**.

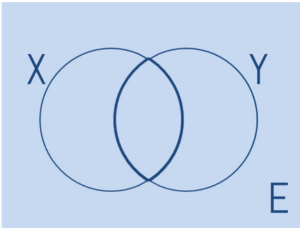
Ejemplo 1: A (par) y B (impar) son sucesos incompatibles (porque ningún número del dado es a la vez par e impar), pero A y C ("par" y "mayor que 4") son compatibles (porque puede salir 6, que es un resultado que verifica los dos sucesos simultáneamente: A⋂C = {6}), y B y C ("impar" y "mayor que 4") también son compatibles (porque 5 es impar y mayor que 4, B⋂C = {5}).



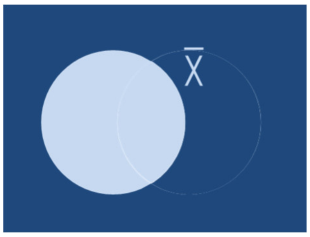
La compatibilidad o incompatibilidad de sucesos no son propiamente una *operación* con sucesos, pero como se define a partir de la intersección, se incluye en este momento como aplicación de esta operación.

2.3. Contrario de un suceso

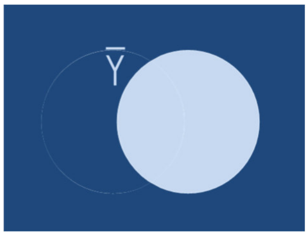
Para cada suceso X del experimento aleatorio, se define el **Suceso Contrario o Complementario**, que se denota X^c ó $\bar{X}$, y puede nombrarse "*no-X*", al conjunto de todos los resultados del espacio muestral que no pertenecen al subconjunto X. Es decir, el suceso contrario es el que se verifica siempre que no sucede X.



Sucesos X e Y



Contrario de X: $\bar{X}$



Contrario de Y: $\bar{Y}$

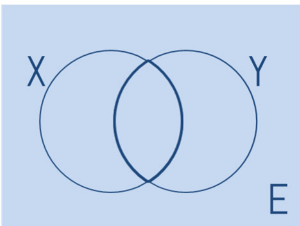
Ejemplo 1: $A^c=\bar{A}=\{1, 3, 5\}=B$; si no sale par, el resultado es impar. Y viceversa: $B^c=\bar{B}=\{2, 4, 6\}=A$. Estos sucesos son complementarios el uno del otro. $C^c=\bar{C}=\{1, 2, 3, 4\}$.

De la definición de Suceso Contrario se derivan las siguientes **propiedades**:

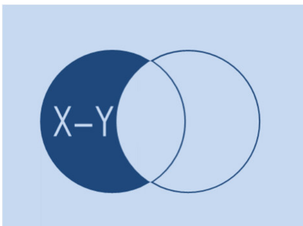
- $X \cup X^c=E$ (la unión de un suceso y su contrario es el Suceso Seguro);
- $X \cap X^c= \emptyset$ (la intersección de un suceso y su contrario es el Suceso Imposible);
- $E^c=\emptyset$ (el contrario del Suceso Seguro es el Imposible), y
- $\emptyset= E^c$ (el contrario del Imposible es el Seguro).

2.4. Diferencia de sucesos

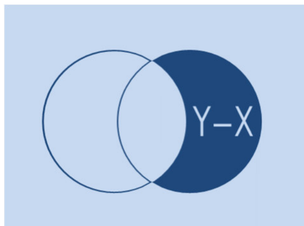
Llamamos **Suceso Diferencia de X e Y**, que se denota X–Y y se puede nombrar *X-menos-Y* ó *X-no-Y*, al que integran los elementos del suceso X que no pertenezcan al suceso Y. Es decir, es el que sucede cuando se verifica X pero no se verifica Y.



Sucesos X e Y



Diferencia X–Y



Diferencia Y–X

Ejemplo 1: Para nuestro ejemplo del dado, con A = "par", B = "impar", C = "mayor que 4":

A–B = A; par pero no impar, es lo mismo que par (porque son sucesos incompatibles);

A–C = {2, 4}; par pero no mayor que 4;

B–A = B; impar pero no par, es lo mismo que impar (porque son incompatibles);

B–C = {1, 3}; impar pero no mayor que 4;

C–A = {5}; mayor que 4 pero no par, es el mayor que 4 impar;

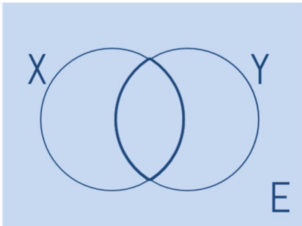
C–B = {6}; mayor que 4 pero no impar.

Nótese que el suceso diferencia X–Y equivale a la intersección del primero con el contrario del segundo, o bien el primero *menos* la intersección con el segundo: $X-Y = X\cap\overline{Y} = X - (X\cap Y)$.

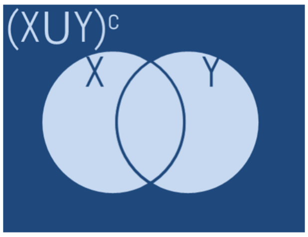
2.5. Leyes de Morgan

Las Leyes de Morgan son un par de propiedades importantes de la unión, la intersección y la complementación de sucesos, y que son muy útiles en el cálculo de probabilidades.

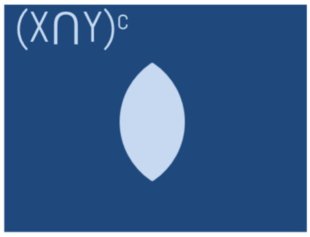
Ley de Morgan de la Unión:	
El contrario de la unión es la intersección de los contrarios:	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
Ley de Morgan de la Intersección:	
El contrario de la intersección es la unión de los contrarios:	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$



Sucesos X e Y



Contrario de la unión



Contrario de la intersección

Ejemplo 1: Aplicándolas a nuestro ejemplo del dado, con A="par", B="impar", C="mayor que 4", al aplicar las Leyes de Morgan se tiene:

En primer lugar, los sucesos contrarios o complementarios de los sucesos considerados son:

$A^c = \{1, 3, 5\} = B$; $B^c = \{2, 4, 6\} = A$; $C^c = \{1, 2, 3, 4\}$.

Y también hay que tener en cuenta que:

$A\cup B = E$ (por ser A y B complementarios o contrarios); $B\cap A = \emptyset$ (por ser A y B incompatibles).

Así, probamos las Leyes de Morgan como sigue:

- Ley de Morgan para $A\cup B$: $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c \rightarrow A\cup B = E \rightarrow (A\cup B)^c = E^c = \emptyset \rightarrow A^c\cap B^c = B\cap A = \emptyset$ ☑
- Ley de Morgan para $A\cap B$: $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c \rightarrow A\cap B = \emptyset \rightarrow (A\cap B)^c = \emptyset^c = E \rightarrow A^c\cup B^c = B\cup A = E$ ☑
- Ley de Morgan para $A\cup C$: $(A\cup C)^c = A^c\cap C^c \rightarrow A\cup C = \{2,4,5,6\} \rightarrow (A\cup C)^c = \{1,3\} = A^c\cap C^c = B\cap C^c$ ☑
- Ley de Morgan para $A\cap C$: $(A\cap C)^c = A^c\cup C^c \rightarrow A\cap C = \{6\} \rightarrow (A\cap C)^c = \{1,2,3,4,5\} = A^c\cup C^c = B\cup C^c$ ☑
- Ley de Morgan para $B\cup C$: $(B\cup C)^c = B^c\cap C^c \rightarrow B\cup C = \{1,3,5,6\} \rightarrow (B\cup C)^c = \{2,4\} = B^c\cap C^c = A\cap C^c$ ☑
- Ley de Morgan para $B\cap C$: $(B\cap C)^c = B^c\cup C^c \rightarrow B\cap C = \{5\} \rightarrow (B\cap C)^c = \{1,2,3,4,6\} = B^c\cup C^c = A\cup C^c$ ☑

Y se comprueba que se cumplen ambas para cualquiera de las combinaciones de sucesos posibles entre los considerados.

3. Probabilidad

3.1. Definición de Laplace de Probabilidad:

Dado un experimento aleatorio cuyo Espacio Muestral E consta de n resultados equiprobables (es decir, que tengan idénticas posibilidades de verificarse al realizar el experimento) (por ejemplo, lanzar una moneda, elegir una carta de una baraja, lanzar un dado), se define la **probabilidad de un suceso** A, y se denota por $P(A)$, como el cociente entre el número de resultados favorables a la verificación del suceso A (o sea, el número de elementos del subconjunto A, n_A), y el número total de resultados posibles de E (n):

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}=\frac{n_A}{n}$$

Ejemplo 3: Consideremos de nuevo el experimento aleatorio de lanzar un dado. El Espacio Muestral es E={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Definimos nuevos sucesos: el suceso A="que salga par"={2, 4, 6}, el suceso B="que salga mayor que 4"={5, 6}, y el suceso C="que salga 3"={3}. Vamos a calcular: **a)** P(A), **b)** P(B), **c)** P(C), **d)** P(A∪B), **e)** P(A∩B), **f)** P(A∪C), **g)** P(A∩C), **h)** P(A−B).

a) $P(A)=\frac{3}{6}=0{,}5$; **b)** $P(B)=\frac{2}{6}\approx 0{,}3333$; **c)** $P(C)=\frac{1}{6}\approx 0{,}1667$.

d) A∪B={2, 4, 5, 6}, luego: $P(A\cup B)=\frac{4}{6}\approx 0{,}6667$

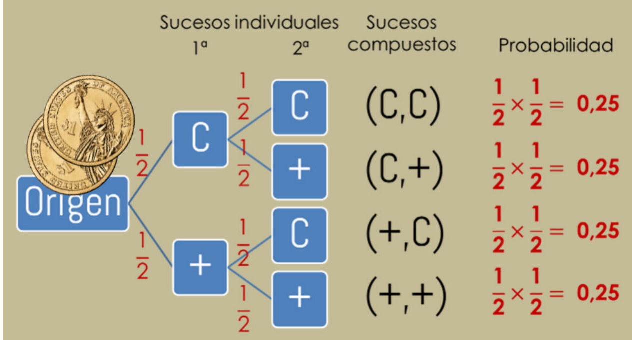
e) A∩B={6}, luego: $P(A\cap B)=\frac{1}{6}\approx 0{,}1667$

f) A∪C = {2, 3, 4, 6}, luego: $P(A\cup C)=\frac{4}{6}\approx 0{,}6667$

g) A∩C = Ø, luego: $P(A\cap C)=\frac{0}{6}=0$

h) A − B = {2, 4}, luego: $P(A-B)=\frac{2}{6}\approx 0{,}3333$

Ejemplo 4: Consideremos un segundo experimento aleatorio: lanzamos dos monedas (o una moneda, dos veces). Los resultados posibles que componen el Espacio Muestral E son: E={(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. Calculemos: **a)** la probabilidad de que salgan dos caras; **b)** la probabilidad de que salga alguna cara; **c)** la probabilidad de que salgan dos cruces.



a) P(C, C) = 1/4 = 0,25

b) P[(C, C) ∪ (C, +) ∪ (+, C)] = 3/4 = 0,75

(se suman porque los resultados separados son incompatibles)

c) P(+, +) = 1/4 = 0,25

Este tipo de representación se denomina *diagrama en árbol*, y es útil para analizar experimentos aleatorios compuestos.

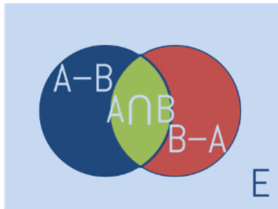
3.2. Definición axiomática de Probabilidad:

Sea un experimento aleatorio de Espacio Muestral E; se define la Probabilidad de un suceso A, y se denota por P(A), como una función que verifica los siguientes axiomas (verdades evidentes que no se pueden demostrar, aunque sí se puede comprobar):

1º) La probabilidad del Suceso Seguro E es 1, o sea $P(E) = 1$;

2º) Para cualquier suceso, $0 \leq P(A) \leq 1$;

3º) Las probabilidades de sucesos incompatibles son aditivas, es decir: si A y B son dos sucesos incompatibles, entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades de los dos sucesos, o sea $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



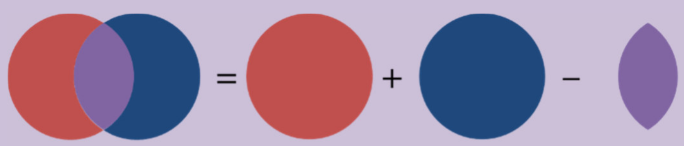
3.3. Propiedades de la Probabilidad:

1) Para los sucesos contrarios A y A^c, se cumple que $P(A^c) = 1 - P(A)$.

2) Para el suceso imposible, $P(\emptyset) = 0$.

3) Para sucesos incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, porque no pueden verificarse a la vez, pero para los sucesos compatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ya que A–B, B–A y $A \cap B$ son mutuamente excluyentes entre sí, y por tanto incompatibles, como puede observarse en el diagrama de Venn. Por tanto:

$$P(A \cup B) = P(A-B) + P(B-A) + P(A \cap B) = [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] + P(A \cap B) =$$
$$= P(A) - \cancel{P(A \cap B)} + P(B) - P(A \cap B) + \cancel{P(A \cap B)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



$$P(X \cup Y) \quad = \quad P(X) \quad + \quad P(Y) \quad - \; P(X \cap Y)$$

Esta es una fórmula básica que hay que tener en cuenta: para los sucesos compatibles, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades individuales menos la probabilidad de la intersección.

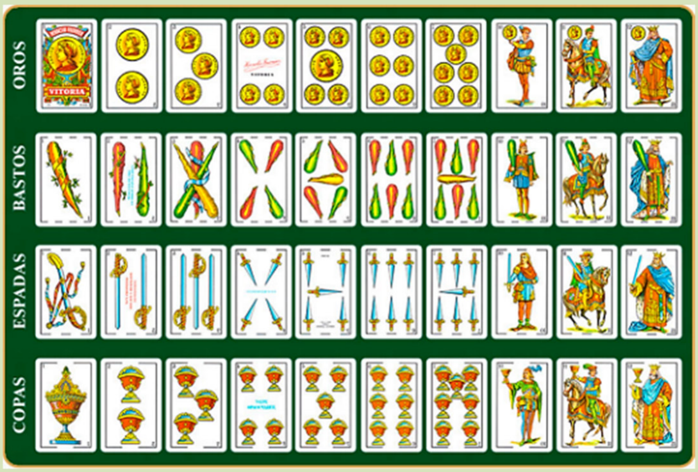
Cuando visualizamos un espacio muestral en forma de diagrama de Venn, podemos asumir que la probabilidad de los sucesos que consideremos es proporcional a la superficie que ocupan en el espacio muestral. Así, si dos sucesos son incompatibles, la superficie que corresponde a la unión de los sucesos es la suma de la superficie de los dos globos. Pero si los sucesos son compatibles, es decir, si existe un solapamiento $X \cap Y$ entre los globos del diagrama de Venn correspondientes a los dos sucesos, la suma de las superficies incluye el solapamiento **dos veces**. Por tanto, hay que restar la probabilidad de la intersección **dos veces**.

Esta es la razón por la que la probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles X e Y es:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$$

De hecho, esta fórmula es **general**, válida también para el caso de los sucesos incompatibles; sólo que en este caso, como la intersección es el conjunto vacío, el término $P(X \cap Y)$ vale 0.

Ejemplo 5: consideremos el experimento aleatorio "extraer una carta de una baraja española de 40 cartas". La baraja española consta de 4 palos (oros, copas, espadas y bastos), y en cada palo existen 10 valores (1 o As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10 o Sota, 11 o Caballo y 12 o Rey).



Sean los sucesos:

A = "extraer un As" = {As de Oros, As de Copas, As de Espadas, As de Bastos}

B = "extraer un dos" = {2 de Oros, 2 de Copas, 2 de Espadas, 2 de Bastos}

C = "extraer una carta de Copas" = {As de Copas, 2 de Copas, 3 de Copas, 4 de Copas, 5 de Copas, 6 de Copas, 7 de Copas, Sota de Copas, Caballo de Copas, Rey de Copas}

Los sucesos A y B son incompatibles, porque no hay ninguna carta que sea simultáneamente un As y un 2: $A \cap B = \emptyset$, luego $P(A \cap B) = 0$. Por tanto, la probabilidad de "extraer o un As o un 2" (o sea, de la unión $A \cup B$) es la suma de las probabilidades de los sucesos individuales:

$P(A) = \frac{4}{40} = 0{,}1$; $P(B) = \frac{4}{40} = 0{,}1$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$

Los sucesos A y C son compatibles, porque existe la posibilidad de que una carta pueda ser al mismo tiempo un As y una carta de Copas: $A \cap C$ = {As de Copas}, por tanto $P(A \cap C) \neq 0$. En este caso, la probabilidad de la unión, o sea, de "extraer un As o una Copa", no es la suma de los sucesos por separado:

$P(A) = \frac{4}{40} = 0{,}1$; $P(C) = \frac{10}{40} = 0{,}25$; $P(A \cap C) = \frac{1}{40} = 0{,}025$;

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}1 + 0{,}25 - 0{,}025 = 0{,}325$

Este resultado coincide con el que se obtiene haciendo el recuento de todas las cartas que cumplen ser un As o ser de Copas (13 cartas: las 10 cartas de Copas, que incluyen el As, y los otros tres Ases), y dividiendo entre el número total de cartas, conforme a la definición de Laplace de probabilidad:

$$P(A \cup C) = \frac{13 \text{ casos favorables}}{40 \text{ casos posibles}} = 0{,}325$$

4. Análisis de experimentos aleatorios compuestos

Un experimento aleatorio compuesto es la realización de varios experimentos aleatorios simples consecutivos. La probabilidad de cada Suceso Elemental (es decir, de cada posible resultado combinado de los distintos experimentos aleatorios simples llevados a cabo) es en este caso el producto de las probabilidades de los sucesos elementales correspondientes a cada experimento aleatorio individual por separado.

Ejemplo 4: Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos monedas (o una moneda, dos veces). Cada vez que lanzamos una moneda (o sea, para el experimento aleatorio simple de lanzar una moneda), son posibles dos resultados elementales: {C, +}. Pero si repetimos el lanzamiento, estamos haciendo un experimento compuesto, y los sucesos elementales del experimento compuesto están formados por dos resultados de los experimentos simples: {(C,C), (C,+), (+,C), (+,+)}. Y la probabilidad de cada uno de esos resultados es el producto de las probabilidades de los sucesos elementales componentes, es decir: $P(C,C) = (½)\times(½) = ¼$; $P(C,+) = (½)\times(½) = ¼$, etc.

El análisis de estas probabilidades puede llevarse a cabo mediante diagramas de árbol o mediante tablas de contingencia.

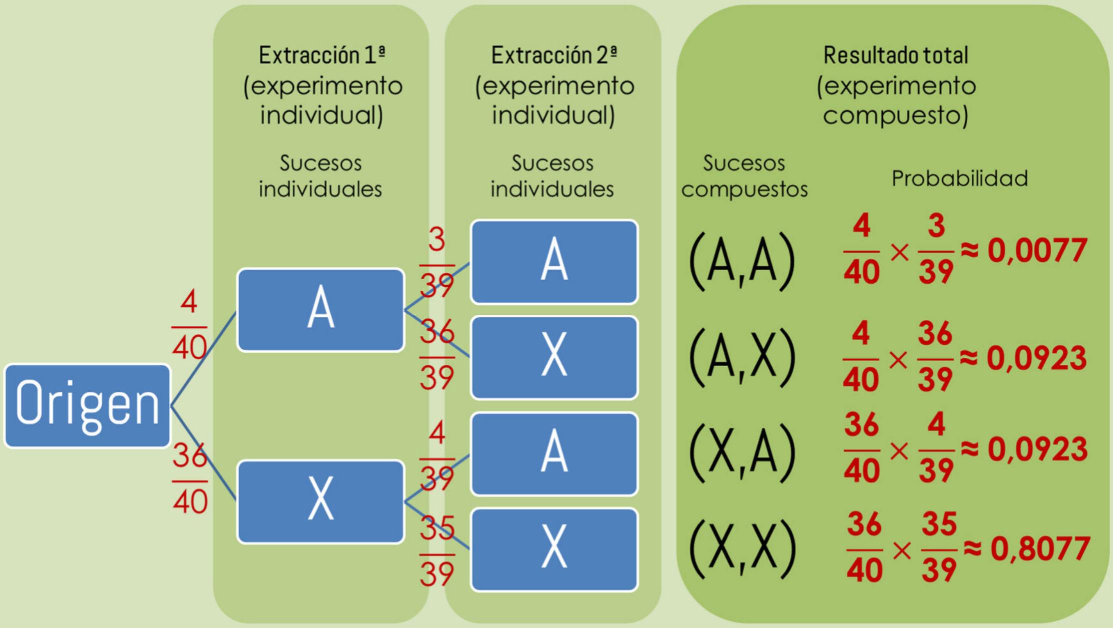
4.1. Diagrama en árbol:

Consiste en un esquema ramificado que considera todos los resultados posibles de cada experimento aleatorio individual. Cada experimento queda representado por nudo del que salen varias ramas, una por cada resultado individual posible, y después de cada rama otra división en ramas correspondientes a los resultados individuales del siguiente experimento aleatorio individual. Cada rama que parte de un nudo representa un suceso diferente, y contempla una probabilidad de cada experimento individual. La suma de las probabilidades asociadas a las ramas que parten de un determinado nodo tiene que dar 1 (ya que P(E)=1). La probabilidad de una "rama compuesta" determinada asociada a una serie de sucesos aleatorios individuales (es decir, la rama de un determinado suceso compuesto) es el producto de las probabilidades cada rama que se ha seguido.

Ejemplo 5: Consideremos el experimento aleatorio compuesto ·extraer consecutivamente dos cartas de una baraja española (sin devolverlas al mazo)". Para cada extracción individual, consideraremos los sucesos A = "que salga un As", y $X = \bar{A}$ = "que no salga un As". Se pregunta: a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga algún As? b) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos Ases? c) ¿Cuál es la probabilidad de que no salga ninguno? d) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta sea un As?

El primer paso al abordar un problema de este tipo es construir el árbol, siguiendo las condiciones que se han descrito: cada experimento aleatorio individual constituye un nudo del árbol del que salen tantas ramas como resultados elementales tenga; cada rama lleva asociada una probabilidad que es la del suceso elemental correspondiente, y todas las probabilidades que parten de un mismo nudo deben sumar 1. La probabilidad del experimento compuesto (digamos de una "rama completa" del árbol) es el producto de todas las ramas individuales que conducen desde el origen del árbol al último suceso aleatorio individual.

Para calcular las probabilidades individuales hay que tener en cuenta la regla de Laplace, pero teniendo presente cuántas cartas quedan en el mazo (casos posibles) y cuántas cumplen cada condición (casos favorables), teniendo en cuenta las extracciones previas. En la primera extracción el mazo está completo, pero en la segunda falta una carta que es un As (si la primera extracción era un As).



La probabilidad de cada suceso hay que calcularla usando la definición de Laplace, pero teniendo en cuenta el número de cartas (favorables y posibles) que quedan en la baraja tras cada evento: si las cartas no se devuelven al mazo, la primera vez se toma de un mazo de 40 cartas, y la segunda de un mazo de 39.

(a) La probabilidad de que salga algún As puede hallarse o bien sumando las probabilidades de todos los sucesos compuestos que incluyen algún As: {(A,A), (A,X), (X,A)}, o bien como el contrario del suceso de que no salga ningún As, $(X,X)^c$.

El cálculo por la primera vía es el siguiente:

P(algún A) = P[(A,A) ∪ (A,X) ∪ (X,A)] = P(A,A) + P(A,X) + P(X,A) ≈ 0,0077 + 0,0923 + 0,0923 = **0,1923**.

Y por la segunda vía sería:

P(algún A) = 1 – P(ningún A) = 1 – P(X,X) = 1 – 0,8077 ≈ **0,1923**.

(b) La probabilidad de que salgan dos Ases es, o bien la probabilidad de la rama completa correspondiente al suceso compuesto (A,A), o bien el contrario de la combinación de sucesos que incluyen alguna carta que no sea un As. En este caso no tiene sentido calcularlo por esta segunda vía, ya que el cálculo es más complejo.

P(A,A) ≈ **0,0077**.

(c) La probabilidad de que no salga ningún As es P(X,X) ≈ **0,8077**.

(d) La probabilidad de que la segunda carta sea un As es la suma de las probabilidades de los sucesos compuestos que cumplen esta condición, que son: (A, A) y (X, A), porque el resultado de la primera extracción es irrelevante en este caso:

P[(A,A)∪(X,A)] = P(A,A) + P(X,A) = 0,0077 + 0,0923 = **0,1**.

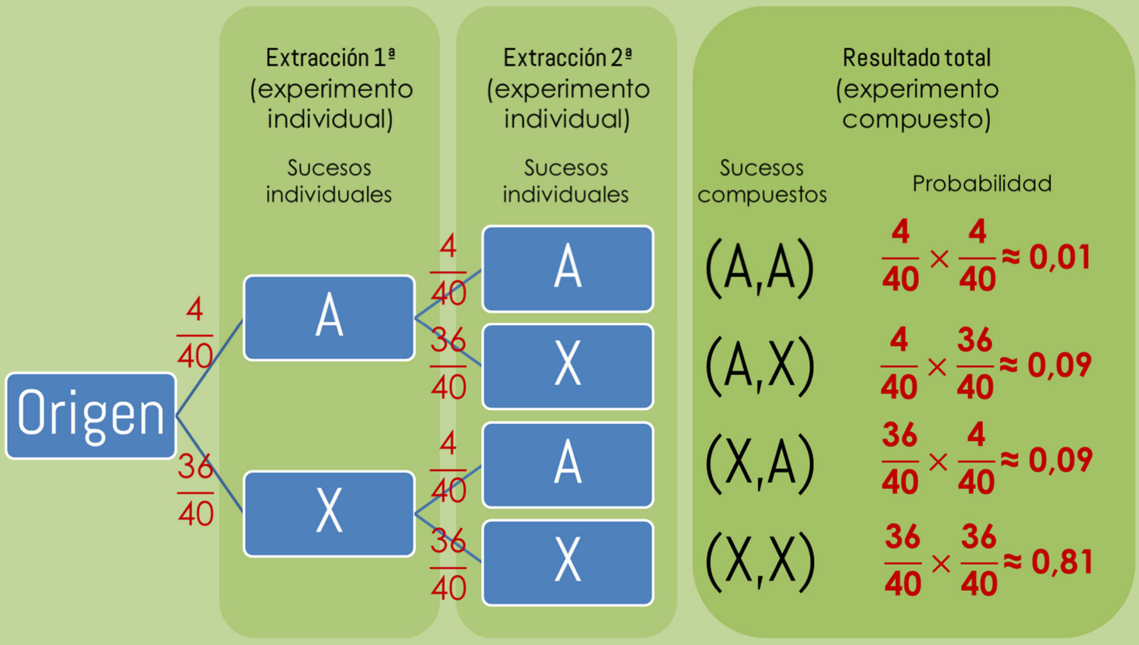
Obsérvese cómo haber construido el árbol al principio facilita mucho los cálculos que se piden.

Nótese que en el caso del apartado (d) la suma de las probabilidades de los dos sucesos que conducen a la extracción de un As en la segunda ejecución (A,A) y (X,A), nos arroja la misma probabilidad que la extracción de un As en un experimento aleatorio individual. Es decir, el resultado de la primera extracción es irrelevante para la segunda extracción. Más adelante veremos que este hecho se conoce como *Independencia de Sucesos*.

En los experimentos aleatorios de este tipo, en que se trata de extraer elementos de un conjunto, hay que distinguir muy bien si los elementos extraídos se devuelven al conjunto original entre una extracción individual y la siguiente, ya que la composición del conjunto puede modificar (o no) las probabilidades en los experimentos individuales sucesivos. Estos modos de proceder se denominan ***con reemplazamiento*** o ***sin reemplazamiento***.

Así, por ejemplo, si la carta que se extrae en la primera extracción se devuelve al mazo y se vuelve a barajar, antes de hacer la segunda extracción, las probabilidades de extraer un As en la segunda extracción serían las mismas que en la primera extracción.

Ejemplo 5' (con reemplazamiento): Si el experimento se lleva a cabo ***devolviendo la carta al mazo*** tras la primera extracción, el árbol y los cálculos de probabilidades quedarían así:



(a') La probabilidad de que salga algún As es:

P(algún A) = P[(A,A) U (A,X) U (X,A)] = P(A,A) + P(A,X) + P(X,A) = 0,01 + 0,09 + 0,09 = 0,19

(b') La probabilidad de que salgan las dos veces es:

P(A,A) = 0,01

(c') La probabilidad de que no salga ningún As es:

P(X,X) = 0,81

(d') La probabilidad de que la segunda carta sea un As es:

P[(A,A)U(X,A)] = P(A,A) + P(X,A) = 0,01 + 0,09 = 0,1.

4.2. Tabla de Contingencia:

Son tablas de doble entrada que representan en filas y columnas las frecuencias absolutas o relativas de dos sucesos individuales componentes de un suceso compuesto de interés; los sucesos se especifican en los encabezamientos de filas y columnas. Las Tablas y los Árboles son interconvertibles, pero permiten visualizar los aspectos del problema de manera diferente, y cada problema puede resultar más fácil de analizar por uno de los dos procedimientos.

Ejemplo 6: De los 80 alumnos que se presentaron a un examen, 45 eran mujeres. 18 mujeres suspendieron, y 20 varones aprobaron. a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar entre todos los estudiantes haya aprobado? b) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo sea un varón, sabiendo que ha aprobado?

Con los datos del problema, podemos construir una tabla de doble entrada que recoja las frecuencias absolutas de los sucesos compuestos mujer-aprobada, mujer-suspensa, varón-aprobado y varón-suspenso:

	MUJERES	VARONES	TOTAL
APROBADOS	27	20	47
SUSPENSOS	18	15	33
TOTAL	45	35	80

(a) La probabilidad de aprobados en la población completa de estudiantes es, aplicando la definición de Laplace, P(A) = 47/80 = **0,5875**.

(b) La probabilidad de varones entre los aprobados es: $P(V/A) = \dfrac{20 \text{ varones aprobados}}{47 \text{ aprobados totales}} = \mathbf{0{,}4255}$.

El cálculo que pide el apartado b) de este ejercicio no se refiere al conjunto total de estudiantes, sino sólo a una parte de ellos. Este cálculo implica tener en cuenta dos condiciones: el género de los estudiantes y la calificación. Como se restringe a una parte de la población que cumpla una condición determinada, estos cálculos se denominan ***Probabilidad condicionada***, y lo estudiaremos a continuación.

5. Probabilidad condicionada y dependencia

5.1. Probabilidad condicionada

En un experimento aleatorio compuesto, la probabilidad de un determinado suceso de los que componen el espacio de sucesos de un experimento aleatorio individual puede verse afectada (o no) por el resultado de otro experimento individual. En este caso se habla de sucesos dependientes (o independientes).

Se llama **Probabilidad del suceso X condicionada al suceso Y**, y se representa **P(X/Y)**, al cociente en la entre la probabilidad de la intersección de X e Y, y la probabilidad de X: $P(X/Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$.

Es decir, es la probabilidad de que se verifique el suceso X, una vez que sabemos con seguridad que se ha verificado el suceso Y. Obviamente, también la probabilidad de Y condicionada a X es: $P(X/Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(X)}$.

Pues bien, de cualquiera de las dos expresiones se deduce la siguiente fórmula, conocida como **Probabilidad Compuesta**: $P(X\cap Y) = P(X)\times P(Y/X) = P(Y)\times P(X/Y)$. Esta fórmula se aplica cuando se multiplican las probabilidades de varios sucesos individuales para una rama completa de un diagrama en árbol.

Ejemplo 1: Consideremos el experimento aleatorio “lanzar un dado”. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par, sabiendo que ha salido un número mayor que 3?

Consideremos los sucesos A=”par”={2,4,6}, y B=“mayor que 3”={4,5,6}. Por separado, las probabilidades de estos dos sucesos son P(A)= 3/6 = ½ = 0,5, y P(B)= 3/6 = ½ = 0,5. El suceso intersección es $A\cap B=\{4,6\}$, y tiene probabilidad $P(A\cap B)= 2/6 = 1/3 \approx 0{,}3333$. La probabilidad condicionada de A sabiendo que se verifica B es:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = 2/3 \approx \mathbf{0{,}6667}$$

5.2. Dependencia e independencia de sucesos

Como acabamos de ver, el que dos sucesos que componen un resultado compuesto sean independientes o no se define y se reconoce mediante la evaluación de la probabilidad condicionada de los sucesos. Si la probabilidad de un suceso X condicionada a otro suceso Y, P(X/Y), es la misma que sin condicionar (es decir, si es la misma que la probabilidad de que el suceso X se verifique en la realización del experimento aleatorio individual correspondiente, P(X)), entonces decimos que X y Y son **sucesos independientes**. En cambio, si la probabilidad de X condicionada a Y no coincide con la probabilidad del suceso individual X, decimos que son **sucesos dependientes**.

X e Y son **sucesos independientes** si:	
La probabilidad condicionada y sin condicionar son la misma	$P(X/Y) = \dfrac{P(X\cap Y)}{P(Y)} = P(X)$, o sea: $P(X\cap Y) = P(X)\cdot P(Y)$
X e Y son **sucesos dependientes** si:	
La probabilidad condicionada y sin condicionar son distintas	$P(X/Y) = \dfrac{P(X\cap Y)}{P(Y)} \neq P(X)$, o sea: $P(X\cap Y) \neq P(X)\cdot P(Y)$

Ejemplo 5: Consideremos el experimento aleatorio "extraer una carta de una baraja española". Se pide: **a)** la probabilidad de extraer un As, y **b)** la probabilidad de extraer un As, sabiendo que la carta extraída es de Copas.

(a) Sean los sucesos A = "extraer un As", y C = "extraer una Copa". Como la baraja tiene 40 cartas, de las que 4 son Ases:

$P(A) = \frac{4}{40} = \mathbf{0{,}1}$.

(b) Sabiendo que la carta extraída es de Copas, si se extrae un As tiene que ser el As de Copas, que es la intersección de los dos sucesos, A∪C.

$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{10} = \mathbf{0{,}1} = P(A)$

Como la probabilidad condicionada P(A/C) es la misma que la probabilidad marginal P(A) del suceso individual, se puede decir que **los sucesos A y C son independientes**.

Ejemplo 6': En la misma población de 80 estudiantes, 45 mujeres y 35 varones, se realiza una encuesta sobre el hábito de fumar. De los 32 estudiantes que se declararon fumadores, 18 eran mujeres. ¿Son sucesos independientes el hábito de fumar y el género?

Nuestro test de independencia establece que los sucesos M ="ser mujer" y F = "ser fumador" son independientes si se verifica que $P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F)$, o lo que es lo mismo, si la probabilidad condicionada de fumar entre las mujeres es la misma que la probabilidad marginal en la población entera, es decir, si $P(F/M) = P(F)$.

Esta indagación puede llevarse a cabo a través de un diagrama en árbol o de una tabla de contingencia, como en el ejemplo 6 anterior.

	MUJERES (M)	VARONES (V)	TOTAL
FUMAN (F)	18	14	32
NO FUMAN (N)	27	21	48
TOTAL	45	35	80

Los datos necesarios para el test de independencia son:

$P(M \cap F) = 18/80 = 9/40 = 0{,}225$

$P(M) = 45/80 = 9/16 = 0{,}5625$; $P(F) = 32/80 = 2/5 = 0{,}4$

Puede comprobarse que efectivamente $P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F) = 0{,}225$, así que podemos decir que en esta población el hábito de fumar y el género **son sucesos independientes**.

Igualmente, podríamos haber comparado la probabilidad condicionada y sin condicionar:

$P(F/M) = 18/45 = 0{,}4$, $P(M) = 32/80 = 0{,}4$,

con la misma conclusión.

Ejemplo 7: La tabla siguiente muestra la distribución de daltónicos por género.

	VARONES (V)	MUJERES (M)	TOTAL
DALTÓNICOS (D)	6	1	7
VISIÓN NORMAL (N)	46	47	93
TOTAL	52	48	100

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que presente la enfermedad? b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer, sabiendo que es una persona con daltonismo? c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un varón, sabiendo que no tiene daltonismo? d) ¿Son sucesos independientes el daltonismo y el género?

(a) Aplicando la definición de Laplace, $P(D) = 7/100 =$ **0,07**.

(b) Usamos la fórmula de la probabilidad condicionada: $P(M/D) = P(M \cap D)/P(D) = 0{,}01/0{,}07 \approx$ **0,1429**.

(c) También con la condicionada: $P(V/N) = P(V \cap N)/P(N) = 0{,}46/0{,}93 \approx$ **0,4946**.

(d) De acuerdo con la condición de independencia, V y D son sucesos independientes si $P(V \cap D) = P(V) \cdot P(D)$, y conforme a los datos de la tabla: $P(V) = 0{,}52$; $P(D) = 0{,}07$.

Puede comprobarse que: $P(V) \cdot P(D) = 0{,}0364 \neq P(V \cap D) = 0{,}06$, por tanto **no son sucesos independientes**. La incidencia del daltonismo no es la misma en varones que en mujeres.

6. Probabilidad total

6.1. Teorema de la Probabilidad Total

Sean X_1, X_2, X_3... X_n una serie de sucesos cuya unión es el suceso seguro E ($X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup ... \cup X_n = E$), y que son incompatibles dos a dos (es decir, que $X_i \cap X_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$), todos posibles (es decir, $P(X_i) \neq 0$ $\forall i$), y sea A un suceso cualquiera del que se conoce la probabilidad condicionada a cada suceso X_i (es decir, se conocen todas las $P(A/X_i)$); entonces, la probabilidad del suceso A viene dada por la expresión:

$$P(A)= \sum_{i=1}^{n} P(X_i) \cdot P(A/X_i) = P(X_1) \cdot P(A/X_1) + P(X_2) \cdot P(A/X_2) + \ldots + P(X_n) \cdot P(A/X_n)$$

Este teorema equivale a decir que, en un diagrama de árbol en que un primer experimento aleatorio individual pueda arrojar los n resultados diferentes X_i, y un segundo experimento aleatorio individual puede arrojar el suceso A a partir de cada X_i, la probabilidad de que se verifique el suceso A es la suma de las probabilidades de todas las ramas completas del árbol que concluyan en la verificación del suceso A.

6.2. Teorema de Bayes

Sean A_1, A_2, A_3... A_n una serie de sucesos cuya unión es el suceso seguro E ($A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = E$), y que son incompatibles dos a dos (es decir, que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$), todos posibles (es decir, $P(A_i) \neq 0$ $\forall i$), y sea B un suceso cualquiera del que se conoce la probabilidad condicionada a cada suceso A_i (es decir, se conocen todas las $P(B/A_i)$); entonces, la probabilidades condicionadas de los sucesos A_i al suceso B vienen dadas por la expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

El teorema de Bayes expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A condicionada a B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B condicionada a A y la probabilidad marginal de solo A. Hablando en cristiano, el teorema de Bayes tiene gran importancia porque relaciona la probabilidad de A condicionada a B con la probabilidad de B condicionada a A. Esto equivale a evaluar la posibilidad de inferir la causa a partir de los efectos, sabiendo que los efectos se deben a las causas.

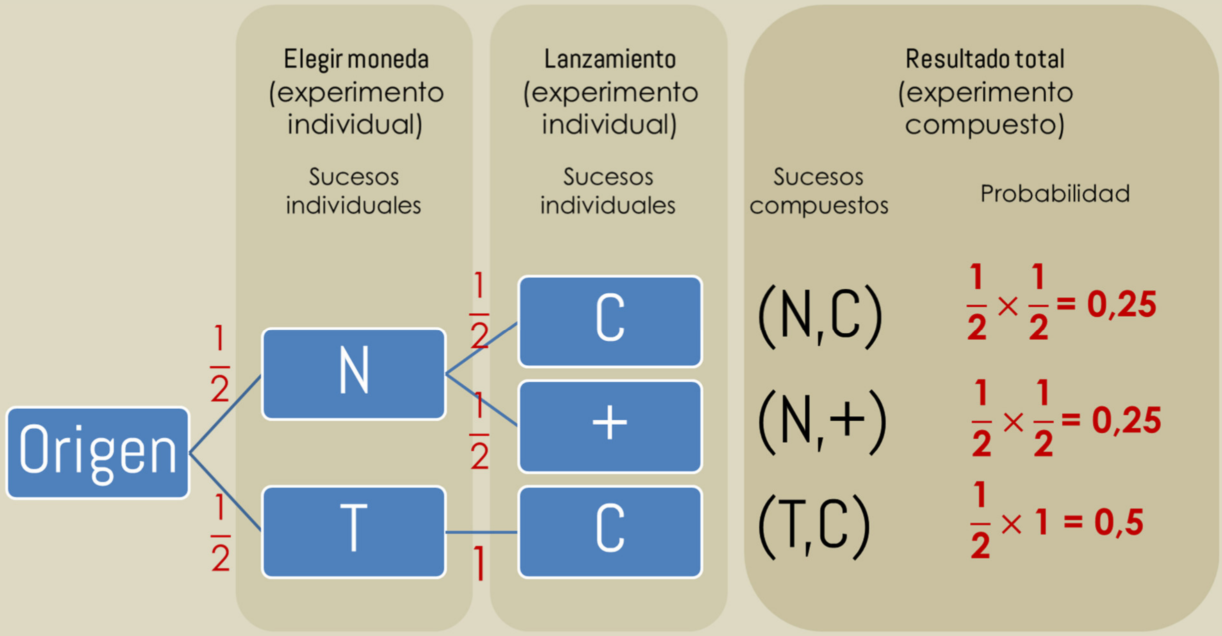
Por ejemplo, si sabemos la probabilidad de tener un dolor de cabeza (efecto) dado que se tiene gripe (causa), se podría saber la probabilidad de tener gripe si se tiene un dolor de cabeza. Por eso es importante en todas las ciencias, ya que permite comprender la probabilidad de las causas a partir de los efectos.

En la práctica, lo vamos a utilizar como una manera de calcular la probabilidad condicionada de un suceso anterior, sabiendo que se verifica un suceso posterior. De aplicar la definición de probabilidad condicionada se obtiene el mismo resultado que de aplicar el Teorema de Bayes.

Puede hacerse el cálculo a partir de un diagrama de árbol, pero el teorema de Bayes permite deducir la probabilidad del suceso previo condicionada al posterior, a partir de la probabilidad del evento posterior condicionada al previo, sin necesidad de hacer el árbol.

Ejemplo 4': Una persona tiene dos monedas: una normal, y otra trucada con dos caras. Se elige una moneda al azar, y se lanza. Se obtiene una cara. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda lanzada fuera la normal?

Construimos el árbol para analizar las probabilidades individuales y compuestas:



A partir del árbol podemos determinar que la probabilidad de obtener una cara era, conforme al Teorema de la Probabilidad Total:

$P(C) = P(N)\cdot P(C/N) + P(T)\cdot P(C/T) = 0,25 + 0,5 = 0,75,$

Mientras que la probabilidad compuesta de que se obtenga una cara con la moneda normal es:

$P(N\cap C) = P(N)\cdot P(C/N) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25,$

Y puede determinarse la probabilidad de haber usado la moneda normal condicionada a que el resultado era cara, usando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(N/C) = \frac{P(N\cap C)}{P(C)} = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3}$$

Pero igualmente puede obtenerse usando el Teorema de Bayes, como sigue:

$$P(N/C) = \frac{P(N)\cdot P(C/N)}{P(N)\cdot P(C/N) + P(T)\cdot P(C/T)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{0,25}{0,25+0,5} = \frac{1}{3}$$

7. Formulario

Definición de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} \quad \text{(sup. equiprobables)}$$

Definición Axiomática

- $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in S$
- $P(A) = 1$, si A es seguro
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$ (incompatibles)

Sucesos, relación, operaciones	Significado	Probabilidad
Unión: $A \cup B$	Sucede A ó B ó ambos	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Intersección: $A \cap B$	Suceden A y B	$P(A \cap B)$
Contrario: $A^c = \overline{A}$	No sucede A	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Diferencia: $A - B = A \cap \overline{B} = A - A \cap B$	Sucede A pero no B	$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
A y B compatibles	Pueden suceder a la vez A y B	$P(A \cap B) \neq \emptyset$
A y B incompatibles o excluyentes	No suceden a la vez A y B	$P(A \cap B) = \emptyset$
Ley de Morgan de la unión, $\overline{A \cup B}$	El contrario de la unión es la intersección de los contrarios	$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$
Ley de Morgan de la intersección, $\overline{A \cap B}$	El contrario de la intersección es la unión de los contrarios	$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$
Probabilidad condicionada, $P(A/B)$	A, sabiendo que sucede B	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
A y B independientes	La probabilidad de un suceso no se afecta por el otro	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, o bien: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
A y B dependientes	La probabilidad de un suceso varía según suceda el otro	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \neq P(A)$, o bien: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
Probabilidad compuesta, $P(A \cap B)$ (rama completa de un árbol)	Probabilidad de que se den varios sucesos individuales	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$
Probabilidad total, $P(B)$	Suceso B a través de varias ramas posibles (tras A_1, A_2...)	$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$
Teorema de Bayes, $P(A_i/B)$ (siendo A_i previo a B)	Suceso A_i (previo) sabiendo que se verifica B (posterior)	$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$

8. Otros ejemplos de aplicación

Para ilustrar cómo se aplican estas fórmulas y conceptos a la resolución de problemas prácticos de examen, resolveremos a continuación algunos problemas de Selectividad de años anteriores.

Problema de probabilidad 2014-Junio-B3.

Antonio va de compras 2 días de cada 5. A lo largo del tiempo, ha observado que la fruta está de oferta la tercera parte de los días que va de compras y la mitad de los días que no va. Elegido un día al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la fruta esté de oferta ese día?

b) Calcule la probabilidad de que ese día Antonio vaya a la compra o la fruta esté de oferta.

Llamemos a los sucesos: C = "va a la compra", N = $\overline{F}$ = "no va", O = "oferta", F = $\overline{O}$ = "no oferta".

Primero construimos el diagrama en árbol:

(a) Usando el Teorema de la Probabilidad Total:

P(O) = P(C)·P(O/C) + P(N)·P(O/N) = 2/15 + 3/10 = 26/60 = 13/30 ≈ **0,4333**

(b) P(C ó O) = P(C∪O) = P(C) + P(O) − P(C∩O) = 2/5 + 13/30 − 2/15 = 21/30 = **0,7**

Problema de Probabilidad 2014-Septiembre-A3.

Se sabe que dos alumnos de la asignatura de Matemáticas asisten a clase, de forma independiente, el primero a un 85% de las clases y el segundo a un 35%. Tomado al azar un día de clase, calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

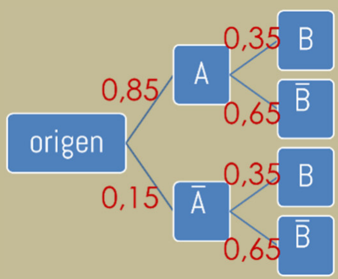
a) que los dos hayan asistido a clase ese día;

b) que alguno de ellos haya asistido a clase ese día;

c) que ninguno haya asistido a clase ese día;

d) que haya asistido a clase el segundo, sabiendo que el primero no ha asistido.

Usaremos la siguiente notación para los sucesos individuales de interés: A = "asiste el primero", $\bar{A}$ = "falta el primero", B = "asiste el segundo", $\bar{B}$ = "falta el segundo". Y construimos el diagrama de árbol:



(a) P(Asisten los dos) = $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}85\times 0{,}35 =$ **0,2975**.

(b) P(Alguno) = 1 – P(ninguno) = $1 - P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) = 1 - 0{,}15\times 0{,}65 =$ **0,9025**. También puede hacerse:

P(Alguno) = $P(A\cap B) + P(A\cap \bar{B}) + P(\bar{A}\cap B) = 0{,}85\times 0{,}35 + 0{,}85\times 0{,}65 + 0{,}15\times 0{,}35 =$ **0,9025**.

(c) P(falten ambos) = $P(\bar{A}\cap \bar{B}) = 0{,}15\times 0{,}65 =$ **0,0975**.

(d) La probabilidad condicionada de que asista el segundo, si no ha asistido el primero, es:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}35\times 0{,}15}{0{,}15} = \mathbf{0{,}35} = P(B)$$

Pero no debería haber hecho falta ni siquiera este cálculo, porque el enunciado dice que los dos sucesos A y B son independientes, así que la probabilidad condicionada debe ser igual a la probabilidad marginal (sin condicionar), por tanto es P(B) = **0,35**.

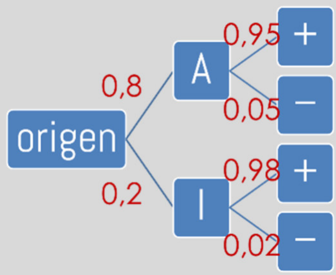
Problema de Probabilidad 2014-Septiembre-B3.

En una tienda de complementos disponen de 100 bolsos, de los cuales 80 son de una conocida marca y 20 son imitaciones casi perfectas de dicha marca. Una inspección encarga a un experto el peritaje de los bolsos de la tienda. Se sabe que este experto acierta en el 95% de sus peritajes cuando el bolso es auténtico y que detecta el 98% de imitaciones. Se elige, al azar, un bolso para su examen:

a) calcule la probabilidad de que el experto acierte en su dictamen sobre ese bolso;

b) si el experto no ha acertado en su peritaje, calcule la probabilidad de que el bolso sea auténtico.

Usaremos la siguiente notación para los sucesos: A = "auténtico", I = $\bar{A}$ = "imitación", + = "acierta el peritaje", y − ="yerra el peritaje". Construimos el árbol de sucesos:



(a) La probabilidad de que acierte el peritaje se calcula con el teorema de la probabilidad total:

P(+) = P(A,+) + P(I,+) = 0,80×0,95 + 0,20×0,98 = **0,956**.

(b) La probabilidad de que sea auténtico (que es una característica previa al peritaje) condicionada a que falle el peritaje, se halla con el Teorema de Bayes:

$$P(A/-) = \frac{P(A)\cdot P(-/A)}{P(-)} = \frac{P(A)\cdot P(-/A)}{1-P(+)} = \frac{0{,}80\times 0{,}05}{0{,}044} \approx \mathbf{0{,}9091}.$$

Problema de Probabilidad 2014-Reserva1-B3.

Se sabe que el 80% de los visitantes de un determinado museo son andaluces y que el 55% son andaluces y adultos. Además, el 17% de los visitantes son no andaluces y adultos. Se elige, al azar, un visitante del museo:

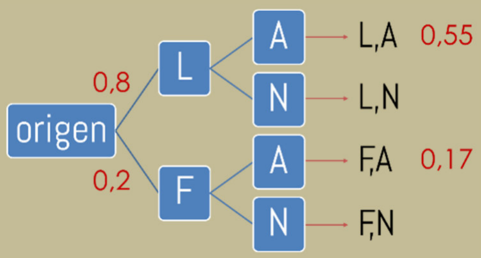
a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea adulto?

b) Si es adulto, ¿cuál es la probabilidad de que sea andaluz?

Estos cálculos pueden resolverse tanto mediante una tabla de contingencia:

	ADULTOS	NIÑOS	TOTAL
ANDALUCES	55%	25%	80%
NO-ANDALUCES	17%	3%	20%
TOTAL	72%	28%	100%

...como con un diagrama en árbol:



Usamos la notación siguiente para los sucesos de interés: L = "andaluces" (locales), F = $\bar{L}$ ="no-andaluces" (forasteros), A = "adultos", N = $\bar{A}$ = "niños".

(a) La probabilidad de no-adulto puede hallarse con el teorema de la probabilidad total, como:

$P(N) = 1 - P(A) = 1 - [P(L,A) + P(F,A)] = 1 - (0{,}55+0{,}17) = \mathbf{0{,}28}$.

(b) La probabilidad de andaluz condicionada a adulto, como el rasgo de andaluz es previo, y conocemos la probabilidad de adulto condicionada a andaluz, puede hallarse con el teorema de Bayes:

$$P(L/A) = \frac{P(L)\cdot P(A/L)}{P(A)} = \frac{0{,}55}{0{,}55+0{,}17} \approx \mathbf{0{,}7639}.$$

Problema de probabilidad 2023-Junio-C5

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

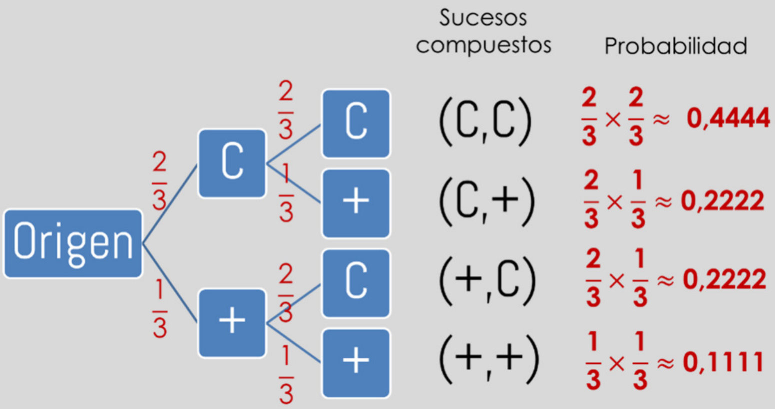
a) Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

c) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

Llamaremos C al suceso "obtener cara" y + a "obtener cruz". La probabilidad de obtener cara es doble que de obtener cruz: P(C) = 2P(+); pero los dos sucesos son exhaustivos, es decir, sus probabilidades suman la unidad porque la unión constituye el espacio muestral completo: P(C) + P(+) = 2P(+) + P(+) = 3P(+) = 1; luego P(+) = 1/3, y P(C) = 2/3. Construimos el árbol:



(a) La probabilidad individual de obtener cara es, como se ha calculado ya, P(C) = 2/3 ≈ **0,6667**.

(b) La probabilidad de obtener una cara y una cruz es:

P(1C y 1+) = P[(C,+)U(+,C)] = P(C,+) + P(+,C) = 2/9 + 2/9 = 4/9 ≈ **0,4444**.

(c) La probabilidad de obtener alguna cara es la suma de obtener cara la primera vez, la segunda y las dos; pero también es la contraria de no obtener ninguna cara:

P(alguna C) = P(C,C) + P(C,+) + P(+,C) = 4/9 + 2/9 + 2/9 = 8/9 ≈ **0,8889**, o bien:

P(alguna C) = 1 – P(ninguna) = 1 – P(+,+) = 1 – 1/9 = 8/9 = **0,8889**.

(d) La probabilidad de que hayan sido dos caras, sabiendo que al menos se ha obtenido una, es una probabilidad condicionada, P[(C,C)/alguna C]:

$$P[(C,C)/\text{alguna } C] = \frac{P[(C,C)\cap(\text{alguna } C)]}{P(\text{alguna } C)} = \frac{P(C,C)}{P(\text{alguna } C)} = \frac{4/9}{8/9} = 1/2 = \mathbf{0{,}5}.$$

Problema de probabilidad 2023-Junio-C5

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20% de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "lottery" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0'6% de los correos que no lo son.

a) Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "lottery" sea spam.

b) Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "lottery" no sea spam.

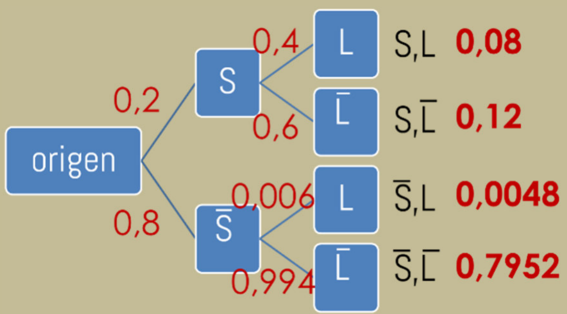
c) Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra "lottery" y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

En primer lugar, definimos la notación para los sucesos implicados y construimos el árbol.

S = "es spam" $\rightarrow$ P(S) = 0,2 $\quad\quad$ $\bar{S}$ = "no es spam" $\rightarrow$ P($\bar{S}$) = 1 − 0,2 = 0,8

L = "contiene *lottery*" $\rightarrow$ P(L/S) = 0,4, y P(L/$\bar{S}$) = 0,006

$\bar{L}$ = "no contiene *lottery*" $\rightarrow$ P($\bar{L}$/S) = 0,6, y P($\bar{L}$/$\bar{S}$) = 0,994



(a) La probabilidad de que sea spam un correo en que aparece *lottery* es una probabilidad condicionada, P(S/L); pero como los datos del problema nos facilitan las probabilidades condicionadas contrarias, P(L/S) y P(L/$\bar{S}$), este cálculo puede hacerse aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(S/L) = \frac{P(S)\cdot P(L/S)}{P(S)\cdot P(L/S)+P(\bar{S})\cdot P(L/\bar{S})} = \frac{0{,}2\times 0{,}4}{0{,}2\times 0{,}4 + 0{,}8\times 0{,}006} \approx 0{,}9434$$

(b) La probabilidad de que no sea spam un correo sin la palabra *lottery* también es una probabilidad condicionada accesible a través del Teorema de Bayes:

$$P(\bar{S}/\bar{L}) = \frac{P(\bar{S})\cdot P(\bar{L}/\bar{S})}{P(S)\cdot P(\bar{L}/S) + P(\bar{S})\cdot P(\bar{L}/\bar{S})} = \frac{0{,}8\times 0{,}994}{0{,}2\times 0{,}6 + 0{,}8\times 0{,}994} \approx 0{,}8689$$

(c) La probabilidad de que el filtro de spam falle al marcar como spam cualquier correo con *lottery* es la probabilidad total de diagnóstico incorrecto, o sea:

P(incorrecto) = $P[(S,\bar{L})\cup(\bar{S},L)] = P(S,\bar{L}) + P(\bar{S},L) = 0{,}2\times 0{,}6 + 0{,}8\times 0{,}006 = 0{,}1248$

8. Versión

Versión 5. Febrero 2024.